■ ■ ■

Exercice 1. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{E}$ si :

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = c_1 + c_2 + c_3 = a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = a_3 + b_3 + c_3$$

On note alors $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.
On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice d'ordre 3 définie par $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que I et J appartiennent à $\mathscr{E}$ et donner les valeurs de $s(I)$ et $s(J)$.

2. Soit a et b deux réels et K la matrice définie par $K = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ -2 & 5 & 3 \\ a & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
Déterminer les réels a et b pour que K soit une matrice de $\mathscr{E}$.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & d & x \\ b & e & y \\ c & z & t \end{pmatrix}$. Déterminer x, y z, t en fonction de a, b, c, d, e pour que M soit une matrice de $\mathscr{E}$.

4. Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

a) Calculer AJ et JA.

b) Montrer que A appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $AJ = JA$.

c) Vérifier que si A appartient à $\mathscr{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

5. Soit A et B deux matrices de $\mathscr{E}$.

a) Montrer que le produit AB appartient à $\mathscr{E}$.

b) Établir l'égalité $s(AB) = s(A)s(B)$.

6. Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathscr{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

a) À l'aide de la question **4.b)**, montrer que A^{-1} appartient à $\mathscr{E}$.

b) Montrer que $s(A) \neq 0$. Exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$.

7. Soit A une matrice de $\mathscr{E}$. On pose $B = \frac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.
On note $\mathscr{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathscr{E}$ vérifiant $s(M) = 0$.

a) Montrer que B appartient à $\mathscr{E}$.

b) Montrer que : $BC = CB = 0$ (matrice nulle).

c) En déduire pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la formule : $(A - B)^n = A^n - B^n$.

d) La matrice C appartient-elle à $\mathscr{F}$?

e) En déduire que toute matrice A de $\mathscr{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathscr{F}$.