Devoir en temps libre

■ ■ ■

Exercice 1.

Partie I.

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 4\ln(x).$$

1. Étudier le sens de variation de g, et vérifier que g admet un minimum sur $]0,+\infty[$ égal à $2(1-\ln(2))$.

2. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout réel x de $]0,+\infty[$.

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{4} + \frac{1+\ln(x)}{x}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité graphique 2cm).

3. Déterminer la limite de f en 0.
Interpréter graphiquement le résultat.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{x}{4}$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

6. Étudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et de (D).
On montrera en particulier que (D) coupe $(\mathscr{C})$ en un point A dont on calculera les coordonnées.

7. Étudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.

8. a) Vérifier que pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$.

b) Étudier la convexité de f. La courbe $(\mathscr{C})$ possède-t-elle des points d'inflexion ?

9. On donne :

$$\frac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0{,}4 \qquad \sqrt{\mathrm{e}} \simeq 0{,}6 \qquad f(\sqrt{\mathrm{e}}) \simeq 1{,}3 \qquad f'(\sqrt{\mathrm{e}}) \simeq 0{,}1.$$

Représenter la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D) dans un même repère orthonormé.

Partie II.

10. Déterminer la dérivée de la fonction u définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$u(x) = (\ln(x))^2.$$

11. En déduire que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+11}{8}$.

12. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{8}{\mathrm{e}^2+11} f(x) & \text{si } x \in [1,\mathrm{e}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

13. Soit X une variable aléatoire admettant h comme densité.

a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_1^{\mathrm{e}} \ln(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

b) Montrer enfin que X admet une espérance et la déterminer.

Exercice 2.

Les questions **4**, **5** *et* **6** *sont indépendantes des questions* **1**, **2** *et* **3**.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières positives d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante :
s'il est sur le point d'abscisse $k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors, à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\frac{k}{k+1}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+1}$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant n. On a donc $A_0 = 0$.
On note U l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que U est une variable aléatoire. On convient que U prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Voici deux exemples :

- Si les abscisses successives du mobile *après* son départ sont $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 1$, $A_4 = 2$, $A_5 = 0$, $A_6 = 0$, alors l'événement $(U = 1)$ est réalisé.
- Si les abscisses successives du mobile *après* son départ sont $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 0$, $A_5 = 0$, $A_6 = 1$, alors l'événement $(U = 4)$ est réalisé.

1. a) Justifier que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}_{[A_{i-1}=i-1]}(A_i = i) = \frac{i}{i+1} \text{ et } \mathbf{P}_{[A_{i-1}=i-1]}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1}.$$

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(U = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables aléatoires A_i.

c) Sans chercher à trouver la loi des variables aléatoires $A_1, \ldots, A_k$, déduire des questions précédentes que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(U = k) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

d) Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(U = k) = 1$.

e) En déduire la valeur de $\mathbf{P}(U = 0)$.

2. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbf{P}(U > n) = \frac{1}{n+1}$.

3. On rappelle que, si le module `numpy.random` a été importé via l'instruction `import numpy.random as rd` et `j` est un entier naturel non nul, l'instruction `np.randint(1, j+1)` renvoie aléatoirement un entier compris entre 1 et `j`.
Compléter les commandes du script suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur prise par U lors de l'expérience aléatoire étudiée.

```
import numpy.random as rd
k = 1
hasard = rd.randint(1, k+2)
while hasard .... :
    k = k + 1
    hasard = ...
print("U a pris la valeur :", k)
```

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4. a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire T qui admet f pour densité.

b) Montrer que la fonction de répartition de T est la fonction F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

5. On appelle partie entière du réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On a ainsi : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Par exemple, si $x = 4{,}7$, alors $\lfloor x \rfloor = 4$, et si $x = 6$, alors $\lfloor x \rfloor = 6$. On pose $N = \lfloor T \rfloor + 1$ et on admet que N est une variable aléatoire.

a) Montrer que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, puis justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}\left(N = n\right) = \mathbf{P}\left(n - 1 \leqslant T < n\right)$$

b) En déduire :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\, \mathbf{P}\left(N = n\right) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

c) Expliquer pourquoi le script de la question **3.** donne une simulation de N.

6. a) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

b) La variable aléatoire N possède-t-elle une espérance ?