Devoir en temps libre

À rendre le lundi 17/03/2025

■ ■ ■

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = 0 \text{ si } t < 0 \text{ et } f(t) = \mathrm{e}^{-t/2} - \mathrm{e}^{-t} \text{ si } t \geqslant 0$$

1. a) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}$.

b) Établir que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Soit a un réel strictement positif. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{a}$.

d) Déduire des questions précédentes que f est une densité de probabilité.

Soit X une variable aléatoire ayant f pour densité.

2. Soit F la fonction de répartition de X.

a) Calculer $F(x)$ pour tout réel $x < 0$.

b) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$ on a : $F(x) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-x/2} + \mathrm{e}^{-x}$.

3. a) Soit Y une variable aléatoire à densité suivant une loi exponentielle de paramètre $a \in]0, +\infty[$. Donner une densité de Y. Rappeler l'espérance de Y.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-at}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}$.

c) Montrer que X admet une espérance et que $\mathbf{E}[X] = 3$.