■ ■ ■

Problème. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{e}^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et en déduire que f est continue à droite en 0.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que f est dérivable à droite en 0 et donner le nombre dérivé à droite de f en 0, noté $f'_d(0)$.

2. a) Déterminer, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, l'expression de $f'(x)$ en fonction de x, où f' désgine la fonction dérivée de f.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis donner les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.

c) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition puis dresser le tableau de variations de f.

d) Vérifier que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $f''(x) = \frac{1}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x}$. La fonction f est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}_+^*$?

3. a) Calculer $\lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$.

c) On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Donner l'équation de la droite asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ et tracer l'allure de $(\mathscr{C})$.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

4. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 0$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

d) Compléter les commandes suivantes pour qu'elles affichent le rang n à partir duquel $u_n \leqslant 10^{-3}$.

```
import numpy as np

n = 0
u = 1
while u > 0.001:
    u = ...
    n = ...

print(n)
```

5. a) Montrer que, pour tout n entier naturel, on a la relation $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} = -\ln(u_{n+1})$.

b) En déduire que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est divergente.