T.D. IV - Matrices inversibles

I - Résolution de systèmes

Exercice 1. (⚙) Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $(S_1)\begin{cases} 5x+y-2z &= 3 \\ x+4y+z &= 2 \\ -3x+2y+3z &= -2 \end{cases}$

2. $(S_2)\begin{cases} 2x+3y-z &= 1 \\ 5x+2y+3z &= 0 \\ -x+y+z &= 5 \end{cases}$

3. $(S_3)\begin{cases} x+y-z &= 2 \\ 3x+5y-z &= 1 \\ 2x+2y+z &= 1 \end{cases}$

4. $(S_4)\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 3x+4y-z &= 2 \\ x+3y+z &= 10 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

1. $(S_1)\begin{cases} 2x+y+z+t &= 3 \\ x+y+z+t &= 12 \\ 3x+2y+2z+t &= 3 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}$

2. $(S_2)\begin{cases} 2x+2y+z+t &= 1 \\ x+y+3z+t &= 2 \\ 3x+y+2z+2t &= -1 \\ 3x+y+2z+3t &= 5 \end{cases}$

II - Inverses par calculs de produits

Exercice 3. (⚙) Dans chacune des questions suivantes, calculer le produit AB, en déduire que A est inversible et exprimer A^{-1}.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ -4 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 4. On pose

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

2. On pose $A = PMP^{-1}$. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$M^n = P^{-1}A^nP.$$

III - Inverses par polynômes de matrices

Exercice 5. On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et en déduire que $M^4 = I$.

2. En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1} en fonction de M.

Exercice 6. (⚙) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 - 12A + 19I_3$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 7. ( ) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - 2A^2 + 3A + 14I_3$.

2. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 8. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit matriciel $(M - I)(M + 3I)$.

2. En déduire que M est inversible et déterminer son inverse.

IV - Non inversibilité

Exercice 9. ( ) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le réel α tel que que $A^3 = \alpha A$.

2. Montrer par l'absurde que A n'est pas inversible.

Exercice 10. ( ) On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.

2. En déduire que A n'est pas inversible.

Exercice 11. ( ) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AB et AC.

2. En déduire que A n'est pas inversible.

V - Inversibilité des matrices de taille 2

Exercice 12. ( ) Pour chacune des matrices d'ordre 2 suivante, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13. On considère le système

$$\begin{cases} -x + 3y & = 11 \\ x + 2y & = 9 \end{cases}.$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice A telle que $AX = Y$.

2. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

3. Utiliser A^{-1} pour résoudre le système.

VI - Inversibilité des matrices diagonales

Exercice 14. ( ) Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, déterminer son inverse.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

VII - Inversibilité des matrices triangulaires

Exercice 15. (⚙) Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \\ 27 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 75 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 25 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

VIII - Inverses par méthodes du pivot

Exercice 16. (⚙) Inverser les matrices suivantes en résolvant le système $AX = Y$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17. (⚙) Inverser les matrices suivantes en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18. On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^2 et en déduire que $M^4 = I$.

2. Calculer $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I)$.

3. Montrer que $M - I$ est inversible.

4. En déduire la valeur de $M^3 + M^2 + M + I$.

IX - Calculs de puissances

Exercice 19. (⚙) Soit A, B, P des matrices d'ordre 2 telles que P soit inversible. On suppose que $P^{-1}AP = B$. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel ; $A^n = PB^nP^{-1}$.

Exercice 20. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.

2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

3. Pour tout n entier naturel, expliciter D^n.

4. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $A^n = PD^nP^{-1}$.

5. En déduire que pour tout n entier naturel,

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 5^n & 0 & 3^n - 5^n \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 3^n - 5^n & 0 & 3^n + 5^n \end{pmatrix}.$$

6. La matrice D est-elle inversible ? Si oui, expliciter son inverse.

7. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 21. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3. Vérifier que $PMP^{-1} = A$.

4. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel n, $M^n = P^{-1}A^nP$.

5. En déduire que pour tout n entier naturel,

$$M^n = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$