

# T.D. IX - Intégrales généralisées

## I - Fonctions continues

**Exercice 1. (🌀)** Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et déterminer sa valeur.

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4} dt.$

2.  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt.$

3.  $\int_2^{+\infty} \frac{5}{t^3} dt.$

4.  $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^4} dt.$

5.  $\int_0^{+\infty} e^{-5t} dt.$

6.  $\int_1^{+\infty} e^{-3t} dt.$

7.  $\int_2^{+\infty} 3e^{-5t} dt.$

8.  $\int_3^{+\infty} 2e^{-t} dt.$

**Exercice 2. (🌀)** Pour chacune des intégrales suivantes, montrer qu'elle converge et déterminer sa valeur.

1.  $\int_{-\infty}^2 e^{3t} dt.$

2.  $\int_{-\infty}^{-5} 2e^t dt.$

3.  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^2} dt.$

4.  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-t)^2} dt.$

**Exercice 3.** Pour tout  $x$  réel, on pose  $h(x) = \ln(1 + e^x)$  et  $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ .

1. Déterminer la dérivée de  $h$ .

2. Montrer que  $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$  converge et déterminer sa valeur.

## II - Fonctions discontinues

**Exercice 4. (🌀)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } t \in [5, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Pour tout  $x$  réel, on pose  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

a) Pour tout  $x < 5$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .

b) Pour tout  $x \in ]5, 10[$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .

c) Pour tout  $x > 10$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .

d) Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout  $x$  réel, on pose  $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt.$

a) Pour tout  $x < 5$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .

b) Pour tout  $x \in ]5, 10[$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .

c) Pour tout  $x > 10$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .

d) Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 5. (🌀)** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t \in [2, 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Pour tout  $x$  réel, on pose  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$

a) Pour tout  $x < 2$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .

b) Pour tout  $x \in ]2, 4[$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .

c) Pour tout  $x > 4$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .

d) Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

2. Pour tout  $x$  réel, on pose  $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$ .
- Pour tout  $x < 2$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .
  - Pour tout  $x \in ]2, 4[$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .
  - Pour tout  $x > 4$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .
  - Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 6.** (✳) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2e^{-2t} & \text{sinon} \end{cases}$ .

- Pour tout  $x$  réel, on pose  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .
  - Pour tout  $x < 0$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .
  - Pour tout  $x > 0$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .
  - Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.
- Pour tout  $x$  réel, on pose  $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$ .
  - Pour tout  $x < 0$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .
  - Pour tout  $x > 0$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .

*On pourra utiliser une intégration par parties.*

  - Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 7.** (✳) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$ .

- Pour tout  $x$  réel, on pose  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ .
  - Pour tout  $x < 0$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .
  - Pour tout  $x > 0$ , déterminer la valeur de  $F(x)$ .
  - Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

- Pour tout  $x$  réel, on pose  $G(x) = \int_{-\infty}^x tf(t) dt$ .
  - Pour tout  $x < 0$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .
  - Pour tout  $x > 0$ , déterminer la valeur de  $G(x)$ .

*On pourra utiliser une intégration par parties.*

  - Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$  est convergente et déterminer sa valeur.

**Exercice 8.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(t) = \begin{cases} \frac{2t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $g$  la fonction définie pour tout  $t \geq 0$  par  $g(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ .

- Pour tout réel  $t \geq 0$ , déterminer  $g'(t)$ .
- Pour tout  $x \geq 0$ , déterminer la valeur de  $\int_{-\infty}^x f(t) dt$ .
- En déduire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge et calculer sa valeur.

**Exercice 9.** (✳) Soit  $f$  la fonction définie par  $f(t) = \begin{cases} \ln(t) & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

Pour tout réel  $A$  supérieur ou égal à 1, on pose  $I(A) = \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x} dx$  et

$$J(A) = \int_{-\infty}^A \frac{f(x)}{x^2} dx.$$

- Pour tout  $A \geq 1$ , déterminer la valeur de  $I(A)$ .
- Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$  diverge.
- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel  $A \geq 1$ ,

$$J(A) = -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1.$$

- En déduire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx$  converge et déterminer sa valeur.