T.D. II - Calcul matriciel

I - Opérations sur des matrices

Solution de l'exercice 1.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 5 - 1\times 2\\ 1\times 5 + 3\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\ 11\end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\times 3 + 1\times 1 + 0\times 2\\ 0\times 3 + 1\times 1 + 2\times 2\\ -1\times 3 + 1\times 1 + 1\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\ 5\\ 0\end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 2.

1. D'après la définition du produit matriciel, on obtient

$$\begin{aligned}AB &= \begin{pmatrix}2{,}5\times 4 - 2\times 0{,}5 - 1\times 4 & 2{,}5\times 1 - 2\times(-3) - 1\times(-2{,}5) & 2{,}5\times(-1) - 2\times 1 - 1\times 0 & 2{,}5\times 2 - 2\times 1 - 1\times 3\\ 5\times 4 - 0\times 0{,}5 + 1\times 4 & 5\times 1 - 0\times(-3) + 1\times(-2{,}5) & 5\times(-1) - 0\times 1 + 1\times 0 & 5\times 2 - 0\times 1 + 1\times 3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5 & -1 & 4\\ 24 & 2,5 & 13\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Comme le nombre de colonnes de B est différent du nombre de lignes de A, le produit BA n'est pas défini. □

Solution de l'exercice 3. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$\begin{cases}4 - 2a & = 2\\ 2b + 2 & = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a & = 1\\ b & = 1\end{cases}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$. □

Solution de l'exercice 4. En utilisant les définitions des opérations sur les matrices carrées,

1. $A + 2B = \begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 8\end{pmatrix}$.

2.

$$\begin{aligned}ABC &= (AB)C\\ &= \begin{pmatrix}2 & 5\\ -12 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}11 & -11\\ -18 & -78\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}A + BC &= \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & -9\\ -5 & -7\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5 & -10\\ -1 & -1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}(A - I_2)(B - I_2) &= \begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -14 & 12\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2 & 3\\ -14 & 12\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 5.

1. En utilisant la définition des puissances,

$$A^4 + 3A^3 + 3A^2 = A\times A^3 + 3A\times A^2 + 3A\times A = A\left(A^3 + 3A^2 + 3A\right).$$

On remarque qu'on peut également effectuer la factorisation par la droite,

$$A^4 + 3A^3 + 3A^2 = A^3\times A + 3A^2\times A + 3A\times A = \left(A^3 + 3A^2 + 3A\right)A.$$

2. En utilisant la définition des puissances,

$$A^3 + 3AB + A^2 = A \times A^2 + 3A \times B + A \times A = A\left(A^2 + 3B + A\right).$$

On remarque que la factorisation **ne** peut **pas** s'effectuer par la droite car, en général, $AB \neq BA$.

3. En utilisant la définition des puissances,

$$A^3 + 3BA + A^2 = A^2 \times A + 3B \times A + A \times A = \left(A^2 + 3B + A\right) A.$$

On remarque que la factorisation **ne** peut **pas** s'effectuer par la gauche car, en général, $AB \neq BA$.

4. En notant I la matrice identité et en utilisant que $A \times I = A$, alors

$$A^3 + 2A^2 + 5A = A \times A^2 + 2A \times A + 5A \times I = A\left(A^2 + 2A + 5I\right).$$

On peut également effectuer la factorisation par la droite car $I \times A = A$,

$$A^3 + 2A^2 + 5A = A^2 \times A + 2A \times A + 5I \times A = \left(A^2 + 2A + 5I\right) A.$$

□

Solution de l'exercice 6.

1. D'après la définition du produit matriciel, $J^2 = 0_2$.
Soit $k \geqslant 2$. Alors, $J^k = J^{k-2} \cdot J^2 = J^{k-2} \cdot 0_2 = 0_2$.

2. D'après la définition du produit matriciel, $J^2 = 0_2$.
Soit $k \geqslant 2$. Alors, $J^k = J^{k-2} \cdot J^2 = J^{k-2} \cdot 0_2 = 0_2$.

3. D'après la définition du produit matriciel, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $J^3 = 0_3$.
Soit $k \geqslant 3$. Alors, $J^k = J^{k-3} \cdot J^3 = J^{k-3} \cdot 0_3 = 0_3$.

4. D'après la définition du produit matriciel, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $J^3 = 0_3$.
Soit $k \geqslant 3$. Alors, $J^k = J^{k-3} \cdot J^3 = J^{k-3} \cdot 0_3 = 0_3$. □

Solution de l'exercice 7. En distribuant le produit par rapport aux sommes,

$$\begin{aligned}
(A - 2I)(A - I) &= A \times A - A \times I - 2I \times A - 2I \times (-I) \\
&= A^2 - A - 2A + 2I, \quad \text{d'après les propriétés de la matrice identité} \\
&= A^2 - 3A + 2I.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8. En utilisant la définition des puissances de matrices puis la distributivité du produit matriciel,

$$\begin{aligned}
(A + I)^3 &= [(A + I) \times (A + I)] \times (A + I) \\
&= (A^2 + A \times I + I \times A + I \times I)(A + I) \\
&= (A^2 + 2A + I)(A + I) \\
&= A^2 \times A + A^2 \times I + 2A \times A + 2A \times I + I \times A + I \times I \\
&= A^3 + A^2 + 2A^2 + 2A + A + I \\
&= A^3 + 3A^2 + 3A + I.
\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 9. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 13 & -1 & 4 \\ 6 & -2 & 4 \\ 8 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 49 & -9 & 22 \\ 26 & -2 & 8 \\ 37 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 10. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Solution de l'exercice 11.

1. D'après la formule du binôme de Newton (également appelée identité remarquable dans ce cas),

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. a) En utilisant la définition des opérations matricielles,

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 83 & 170 \\ 20 & 43 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

b) En utilisant la définition des opérations matricielles,

$$\begin{aligned}A^2 + 2AB + B^2 &= \begin{pmatrix} 24 & 48 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 88 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 82 & 172 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

c) On constate que, pour les matrices, en général, $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
En effet, en développant le produit matriciel,

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Ainsi, si $AB \neq BA$, alors $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. $\square$

Solution de l'exercice 12. D'après la définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} D^2 + 5D &= -4I_2 \\ \begin{pmatrix} d_1^2 & 0 \\ 0 & d_2^2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} &= -4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d_1^2 + 5d_1 & 0 \\ 0 & d_2^2 + 5d_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} d_1^2 + 5d_1 + 4 &= 0 \\ d_2^2 + 5d_2 + 4 &= 0 \end{cases}$$

Le trinôme $X^2 + 5X + 4$ a un discriminant Δ qui vaut

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 4 = 9.$$

Ainsi, les racines de ce trinôme sont :

$$x_1 = \frac{-5-3}{2} = -4 \text{ et } x_2 = \frac{-5+3}{2} = -1.$$

Ainsi, d_1 peut prendre les valeurs -1 ou -4 et il en va de même pour d_2. Les matrices D possibles sont donc

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\square$

II - Calculs de puissances

II.1 - Récurrences

Solution de l'exercice 13.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De même,

$$\begin{aligned} A^3 = A \times A^2 &= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 16 & 0 & 0 \\ 0 & -1 \times 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. Montrons la propriété par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 1$.

D'après la définition, $A^1 = A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} 4^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient bien

$$A^1 = \begin{pmatrix} 4^1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n, \text{ d'après la définition des puissances,} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 4^n & 0 & 0 \\ 0 & -(-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 1 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \geqslant 1,\ A^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 14.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même,

$$\begin{aligned} A^3 = A \times A^2 &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 25 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Montrons la propriété par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.

D'après la définition, $A^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} 5^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient bien

$$A^0 = \begin{pmatrix} 5^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^0 \end{pmatrix}.$$

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n, \text{ d'après la définition des puissances,} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2 \times 2^n & 0 \\ 0 & 0 & -1 \times (-1)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \geqslant 0,\ A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 15.

1. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 + 2 \times 2 & 0 \times 2 + 2 \times 0 \\ 2 \times 0 + 0 \times 2 & 2 \times 2 + 0 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

De manière analogue,

$$B^3 = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 4 + 2 \times 0 & 4 \times 2 + 0 \times 0 \\ 2 \times 4 + 0 \times 0 & 2 \times 0 + 0 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons la propriété par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.
D'après la définition, $B^{2\times 0+1} = B^1 = B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
D'autre part, $\begin{pmatrix} 0 & 2^{2\times 0+1} \\ 2^{2\times 0+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^1 \\ 2^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

On obtient bien

$$B^{2\times 0+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{2\times 0+1} \\ 2^{2\times 0+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$. On suppose que $B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} B^{2(n+1)+1} &= B^{2n+2+1} = B^{2+2n+1} = B^2 \times B^{2n+1} \\ &B^2 \times B^{2n+1}, \text{ d'après la définition des puissances,} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'H.R.} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \times 0 + 0 \times 2^{2n+1} & 4 \times 2^{2n+1} + 0 \times 0 \\ 0 \times 0 + 4 \times 2^{2n+1} & 0 \times 2^{2n+1} + 4 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2^2 \times 2^{2n+1} \\ 2^2 \times 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+3} \\ 2^{2n+3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2^{2(n+1)+1} \\ 2^{2(n+1)+1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \geqslant 0,\ B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{2n+1} \\ 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. D'après la définition du produit matriciel,

$$B^2 = B \times B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} B^3 &= B \times B^2 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Montrons cette propriété par récurrence sur n.
Initialisation. Lorsque $n = 0$.

D'une part, $B^{2\times 0+1} = B^1 = B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} 3^{2\times 0+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2\times 0+1} \\ 0 & 2^{2\times 0+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^1 \\ 0 & 2^1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \\ 0 & 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant la définition des puissances,

$$\begin{aligned} B^{2(n+1)+1} = B^{2n+2+1} &= B^2 \times B^{2n+1} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \\ 0 & 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \times 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \times 2^{2n+1} \\ 0 & 4 \times 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^2 \times 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \times 2^{2n+1} \\ 0 & 2^2 \times 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^{2n+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+3} \\ 0 & 2^{2n+3} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \geqslant 0,\ B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2n+1} \\ 0 & 2^{2n+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Solution de l'exercice 17.

1. a) En utilisant la définition du produit matriciel,

$$A^2 = \begin{pmatrix} (-2)^2+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 6-3-9 & 0+1+9 & 0+3+3 \\ 6-9-3 & 0+3+3 & 0+9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 10 & 6 \\ -6 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A^2-2A-8I &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -6 & 10 & 6 \\ -6 & 6 & 10 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4+4-8 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ -6+6+0 & 10-2-8 & 6-6+0 \\ -6+6+0 & 6-6+0 & 10-2-8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Montrons la propriété par récurrence sur n.

Initialisation. Lorsque $n=0$. D'après la définition, $A^0 = I$. Ainsi, en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, alors $A^0 = a_0A + b_0I$.

Lorsque $n = 1$. D'après la définition, $A^1 = A$. Ainsi, en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, alors $A^1 = a_1A + b_1I$.

Lorsque $n = 2$. D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned} A^2-2A-8I &= 0 \\ A^2 &= 2A+8I. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant $a_2 = 2$ et $b_2 = 8$, alors $A^2 = a_2A + b_2I$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$.

En utilisant la définition des puissances matricielles,

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times (a_nA + b_nI), \text{ d'après l'H.R.} \\ &= a_nA^2 + b_nA \\ &= a_n(2A+8I) + b_nA \\ &= 2a_nA + 8a_nI + b_nA \\ &= (2a_n+b_n)A + 8a_nI. \end{aligned}$$

En posant $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 9a_n$, alors

$$A^{n+1} = a_{n+1}A + b_{n+1}I.$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$.

Conclusion. La propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, d'après le principe de récurrence il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = a_nA + b_nI.$$

2. a) En utilisant les relations précédentes,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= 4(2a_n+b_n) + 8a_n \\ &= 16a_n + 4b_n \\ &= 4(4a_n+b_n) \\ &= 4u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite récurrente de raison 4.

En utilisant les relations précédentes,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2a_{n+1} + b_{n+1} \\ &= -2(2a_n+b_n) + 8a_n \\ &= 4a_n - 2b_n \\ &= -2(-2a_n+b_n) \\ &= -2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite récurrente de raison -2.

b) D'après les calculs initiaux,

$$u_0 = 4a_0 + b_0 = 4\times 0 + 1 = 1.$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$u_n = 4^n u_0 = 4^n.$$

D'après les calculs initiaux,

$$v_0 = -2a_0 + b_0 = -2\times 0 + 1 = 1.$$

Ainsi, pour tout n entier naturel,

$$v_n = (-2)^n v_0 = (-2)^n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les calculs précédents,

$$\begin{cases} 4a_n + b_n & = 4^n \\ -2a_n + b_n & = (-2)^n \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a_n + b_n & = 4^n \\ 3b_n & = 4^n + 2(-2)^n \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_1 + 2L_2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_n & = \frac{4^n+2(-2)^n}{3} \\ a_n & = \frac{4^n - b_n}{4} = \frac{3\times 4^n - 4^n - 2(-2)^n}{12} = \frac{4^n-(-2)^n}{6}. \end{cases}$$

3. En utilisant les questions précédentes,

$$\begin{aligned} A^n &= a_n A + b_n I \\ &= \frac{4^n - (-2)^n}{6} A + \frac{4^n + 2(-2)^n}{3} I \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{4^n-(-2)^n}{3} + \frac{4^n+2(-2)^n}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{4^n-(-2)^n}{2} & \frac{4^n-(-2)^n}{6} + \frac{4^n+2(-2)^n}{3} & \frac{4^n-(-2)^n}{2} \\ -\frac{4^n-(-2)^n}{2} & \frac{4^n-(-2)^n}{2} & \frac{4^n-(-2)^n}{6} + \frac{4^n+2(-2)^n}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ -2^{n-1}(2^n-(-1)^n) & \frac{4^n+(-2)^n}{2} & 2^{n-1}(2^n-(-1)^n) \\ -2^{n-1}(2^n-(-1)^n) & 2^{n-1}(2^n-(-1)^n) & \frac{4^n+(-2)^n}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ -2^{n-1}(2^n-(-1)^n) & 2^{n-1}(2^n+(-1)^n) & 2^{n-1}(2^n-(-1)^n) \\ -2^{n-1}(2^n-(-1)^n) & 2^{n-1}(2^n-(-1)^n) & 2^{n-1}(2^n+(-2)^n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

II.2 - Formule du binôme

Solution de l'exercice 18.

1. D'après la définition,

$$\begin{aligned} J &= A - 2I_3 \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De manière analogue,

$$J^3 = J \times J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 3$, d'après la définition des puissances de matrices,

$$J^k = J^3 \times J^{k-3} = 0_3 \times J^{k-3} = 0_3.$$

3. D'après la définition,

$$A = 2I_3 + J.$$

- $*$ D'une part, $(2I_3) \times J = 2I_3 J = 2J$.
- $*$ D'autre part, $J \times (2I_3) = 2JI_3 = 2J$.

Ainsi, $(2I_3) \times J = J \times (2I_3)$ et les matrices $2I_3$ et J commutent. Donc, d'après la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
A^n &= (2I_3 + J)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^{n-k} J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_3^{n-k} J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I_3 J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k \\
&= \binom{n}{0} 2^{n-0} J^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} 2^{n-2} J^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \underbrace{J^k}_{=0_3} \\
&= 1 \times 2^n \times I_3 + n \times 2^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} J^2 \\
&= 2^n \left(I_3 + n 2^{-1} J + \frac{n(n-1)}{2} 2^{-2} J^2 \right) \\
&= 2^n \left(I_3 + n \frac{1}{2} J + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{2^2} J^2 \right) \\
&= 2^n \left(I_3 + \frac{n}{2} J + \frac{n(n-1)}{8} J^2 \right).
\end{aligned}$$

4. Ainsi, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
A^n &= 2^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{n}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{8} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= 2^n \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n(n-1)}{8} \\ 0 & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. Lorsque $n = 0$.

* D'une part, $A^0 = I_3$.
* D'autre part, $2^0 \left(I_3 + \frac{0}{2} J + \frac{0(0-1)}{8} J^2 \right) = 1 \times I_3 = I_3$.

Ainsi, $A^0 = 2^0 \left(I_3 + \frac{0}{2} J + \frac{0(0-1)}{8} J^2 \right)$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

Lorsque $n = 1$.

* D'une part, $A^1 = A$.
* D'autre part,

$$2^1 \left(I_3 + \frac{1}{2} J + \frac{1(1-1)}{8} J^2 \right) = 2I_3 + J = A.$$

Ainsi, $A^1 = 2^1 \left(I_3 + \frac{1}{2} J + \frac{1(1-1)}{8} J^2 \right)$ et la propriété est vraie pour $n = 1$. $\square$

Solution de l'exercice 19.

1. D'après la définition,

$$\begin{aligned}
B &= A - 3I_3 \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. En utilisant la définition du produit matriciel,

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

De manière analogue,

$$B^3 = B \times B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4-4 & 4-4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $k \geqslant 3$, d'après la définition des puissances de matrices,

$$B^k = B^3 \times B^{k-3} = 0_3 \times B^{k-3} = 0_3.$$

3. D'après la définition,

$$A = 3I_3 + B.$$

$*$ D'une part, $(3I_3) \times B = 3I_3B = 3B$.
$*$ D'autre part, $J \times (3I_3) = 3BI_3 = 3B$.

Ainsi, $(3I_3) \times B = B \times (3I_3)$ et les matrices $3I_3$ et B commutent. Donc, d'après la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
A^n &= (3I_3 + B)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I_3)^{n-k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3^{n-k} B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3 B^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k \\
&= \binom{n}{0} 3^{n-0} B^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1} B^1 + \binom{n}{2} 3^{n-2} B^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} \underbrace{B^k}_{=0_3} \\
&= 1 \times 3^n \times I_3 + n \times 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 \\
&= 3^n \left(I_3 + n 3^{-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{-2} B^2 \right) \\
&= 3^n \left(I_3 + n \frac{1}{3} B + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{3^2} B^2 \right) \\
&= 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3} J + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right).
\end{aligned}$$

4. Lorsque $n = 0$.

$*$ D'une part, $A^0 = I_3$.
$*$ D'autre part, $3^0 \left(I_3 + \frac{0}{3} B + \frac{0(0-1)}{18} B^2 \right) = 1 \times I_3 = I_3$.

Ainsi, $A^0 = 3^0 \left(I_3 + \frac{0}{3} B + \frac{0(0-1)}{18} B^2 \right)$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

Lorsque $n = 1$.

$*$ D'une part, $A^1 = A$.
$*$ D'autre part,

$$\begin{aligned}
3^1 \left(I_3 + \frac{1}{3} B + \frac{1(1-1)}{18} B^2 \right) &= 3I_3 + 3\frac{1}{3} B \\
&= 3I_3 + B = A.
\end{aligned}$$

Ainsi, $A^1 = 2^1 \left(I_3 + \frac{1}{2} J + \frac{1(1-1)}{8} J^2 \right)$ et la propriété est vraie pour $n = 1$. $\square$

Solution de l'exercice 20. On peut utiliser la formule du binôme de Newton. En effet, posons $B = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, en utilisant la définition et les propriétés du calcul matriciel,

$*$ $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$*$ $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
$*$ Soit $k \geqslant 3$. Alors,

$$B^k = B^{k-3} \times B^3 = B^{k-3} \times 0_3 = 0_3.$$

Soit $n \geqslant 2$. Avec les notations précédentes,

$$A^n = (B + I_3)^n.$$

Comme $B \times I_3 = B$ et $I_3 \times B = B$, alors I_3 et B commutent et d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
A^n &= (B+I_3)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3, \text{ car } I_3^{n-k} = I_3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k, \text{ car } BI_3 = B \\
&= \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \binom{n}{2} B^2 + \cdots \\
&\qquad \cdots + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{B^k}_{=0_3} \\
&= 1 \times I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lorsque $n = 0$, alors

- $*$ $A^0 = I_3$ par définition,
- $*$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0(0-1)}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Lorsque $n = 1$, alors

- $*$ $A^1 = A$ par définition,
- $*$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1(1-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$.

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 1.

Finalement, pour tout n entier naturel,

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2^e méthode. On montre la propriété par récurrence sur n.

Initialisation. Lorsque $n = 0$,

- $*$ $A^0 = I_3$ par définition,
- $*$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{0(0-1)}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrons que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après la définition des puissances de matrices,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n \times A \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ d'après l'H.R.} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & \frac{2n+n^2-n}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & \frac{n+n^2}{2} \\ 0 & 1 & 1+n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion. Finalement, la propriété est vraie à l'ordre 0 et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\square$