

T.D. X - Variables aléatoires à densité

I - Densités

Solution de l'exercice 1.

- * D'après les théorèmes usuels, la fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 0 et en $2a$.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{2a^2} = \frac{0}{2a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.

En particulier, f est continue en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow 2a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en $2a$.

Comme $\lim_{t \rightarrow 2a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^-} \frac{t}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à gauche en $2a$.

En particulier, f n'est pas continue en $2a$.

- * Comme $x \geq 0$ lorsque $x \in [0, 2a]$ alors f est positive sur $[0, 2a]$. De plus, elle est positive en dehors de $[0, 2a]$, donc f est positive sur \mathbb{R} .
- * Comme f est nulle en dehors de $[0, 2a]$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_0^{2a} f(t) dt = \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2} dt \\ &= \frac{1}{2a^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{(2a)^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 2.

- * D'après les théorèmes usuels, la fonction f est continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en 1.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\ln(1)}{1^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 1.

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.

En particulier, f est continue en 0.

- * Comme la fonction \ln est positive sur $[1, +\infty[$, alors f est positive sur $[1, +\infty[$. Comme f est nulle sur $] -\infty, 1]$, alors $f \geq 0$ sur cet intervalle. Finalement, f est bien à valeurs positives sur \mathbb{R} .
- * Soit $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^{+\infty} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^1 0 dt + \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt \\ &= 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}, \text{ d'après l'énoncé.} \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$. Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t) dt = 1 \text{ soit}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. □

Solution de l'exercice 3.

- * D'après les théorèmes généraux, f_n est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^-} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$, alors f_n admet une limite finie à gauche en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} f_n(t) = n0^{n-1} = 0$, alors f_n admet une limite finie à droite en 0.

En particulier, f_n est continue en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow 1^+} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0$, alors f_n admet une limite finie à droite en 1.

Comme $\lim_{t \rightarrow 1^-} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} nt^{n-1} = n1^{n-1} = n$, alors f_n admet une limite finie à gauche en 1.

En particulier, f_n n'est pas continue en 1.

* Comme $nt^{n-1} \geq 0$ sur $[0, 1]$ et f_n est nulle en dehors de $[0, 1]$, alors f_n est positive sur \mathbb{R} .

* Comme f_n est nulle en dehors de $[0, 1]$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt &= \int_0^1 nt^{n-1} dt = n \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^1 \\ &= n \left(\frac{1}{n} - 0 \right) = 1. \end{aligned}$$

Finalement, f_n est bien une densité de probabilité. \square

Solution de l'exercice 4.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0, a et $2a$.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.

En particulier, f est continue en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} \frac{t}{a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à gauche en a .

Comme $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{2a-t}{a^2} = \frac{2a-a}{a^2} = \frac{1}{a}$, alors f admet une limite finie à droite en a .

En particulier, f est continue en a .

Comme $\lim_{t \rightarrow 2a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^-} \frac{2a-t}{a^2} = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en $2a$.

Comme $\lim_{t \rightarrow 2a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2a^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en $2a$.

En particulier, f est continue en $2a$.

* Comme $t \geq 0$ sur $[0, a]$ et $2a - t \geq 0$ sur $[a, 2a]$, alors f est positive sur \mathbb{R} .

* Comme f est nulle en dehors de $[0, 2a]$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_0^a \frac{t}{a^2} dt + \int_a^{2a} \frac{2a-t}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a t dt + \int_a^{2a} \frac{2a}{a^2} dt - \frac{1}{a^2} \int_a^{2a} t dt \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^a + \frac{2}{a} [t]_a^{2a} - \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{1}{2} + 2 - \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité. \square

Solution de l'exercice 5.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0 et 1.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{kt}{1+t} = \frac{k \times 0}{1+0} = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 0.

En particulier, f est continue en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{kt}{1+t} = \frac{k}{2}$, alors f admet une limite finie à gauche en 1.

Comme $\lim_{t \rightarrow 1^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à droite en 1.

En particulier, f est continue en 0. De plus, si $k \neq 0$, alors f n'est pas continue en 1.

* Comme $\frac{t}{1+t} \geq 0$ lorsque $t \in [0, 1]$, alors $\frac{kt}{1+t} \geq 0$ si et seulement si $k \geq 0$. De plus, f est nulle, donc positive, en dehors de $[0, 1]$.

Ainsi, $f \geq 0$ sur \mathbb{R} si et seulement si $k \geq 0$.

* Comme f est nulle en dehors du segment $[0, 1]$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{kt}{1+t} dt = k \int_0^1 \frac{t}{1+t} dt = k(1 - \ln(2)).$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kt}{1+t} dt = 1$ si et seulement si $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$.

Comme $1 - \ln(2) \geq 0$, la fonction f est une densité de probabilité si et seulement si $k = \frac{1}{1-\ln(2)}$. \square

II - Fonctions de répartition, Espérances, Variances

Solution de l'exercice 6.

1. Montrons que f est une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, f est continue sauf éventuellement en 0.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$, la fonction f admet une limite finie à gauche en 0.

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(x+1)^2} = 1$, la fonction f admet une limite finie à droite en 0.

En particulier, la fonction f n'est pas continue en 0.

* Comme $\frac{1}{(x+1)^2} \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et $f(x)$ est nulle pour $x < 0$, alors la fonction f est à valeurs positives.

* Soit $A \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^A f(t) dt &= \int_{-\infty}^A 0 dt + \int_0^A \frac{1}{(x+1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x+1} \right]_0^A \\ &= 1 - \frac{1}{A+1}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{A+1} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

2. D'après la définition, $F_T(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

* Si $x \leq 0$, alors

$$F_T(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

* Si $x > 0$, alors d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2} dt = 1 - \frac{1}{1+x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1}{1+x} & \text{sinon.} \end{cases}$$

\square

Solution de l'exercice 7.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x \leq 0$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

* Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^x \left(e^{-t/2} - e^{-t} \right) dt \\ &= \int_0^x e^{-t/2} dt - \int_0^x e^{-t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-t/2}}{-\frac{1}{2}} \right]_0^x - \left[\frac{e^{-t}}{-1} \right]_0^x \\ &= \left[-2e^{-t/2} \right]_0^x - \left[-e^{-t} \right]_0^x \\ &= 2 - 2e^{-x/2} - (1 - e^{-x}) \\ &= 1 + e^{-x} - 2e^{-x/2}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 + e^{-x} - 2e^{-x/2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

2. Si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, alors sa densité est donnée par

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ ae^{-at} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

En particulier, $\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{a}$.

D'après la définition de l'espérance,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y] &= \frac{1}{a} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} tf_Y(t) dt &= \frac{1}{a} \\ \int_0^{+\infty} ate^{-at} dt &= \frac{1}{a} \\ \int_0^{+\infty} te^{-at} dt &= \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

3. Si l'intégrale converge, alors $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$. Soit $A \geq 0$.

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^A tf(t) dt &= \int_0^A tf(t) dt \\ &= \int_0^A t(e^{-t/2} - e^{-t}) dt \\ &= \int_0^A te^{-t/2} dt - \int_0^A te^{-t} dt. \end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} * \int_0^{+\infty} te^{-t/2} dt &\text{ converge et vaut } \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = 4, \\ * \int_0^{+\infty} te^{-t} dt &\text{ converge et vaut } 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^A tf(t) dt = 4 - 1 = 3.$$

Donc, X admet une espérance et $\mathbf{E}[X] = 3$. \square

Solution de l'exercice 8.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x < 1$, alors

$$G(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

* Si $x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Posons $\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ u'(t) = \frac{1}{t} \end{cases}$ et $\begin{cases} v'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v(t) = -\frac{1}{t} \end{cases}$. Les fonctions u et v sont dérivables et de dérivées continues sur $[1, x]$. Ainsi, d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned} G(x) &= \left[\ln(t) \times \left(-\frac{1}{t}\right) \right]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times \left(-\frac{1}{t}\right) dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \left(-\frac{\ln(1)}{1}\right) + \int_1^x \frac{1}{t^2} dt \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1. \end{aligned}$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1, \\ 1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Sous réserve de convergence, $\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$.

Soit $x \geq 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x tf(t) dt &= \int_{-\infty}^1 tf(t) dt + \int_1^x tf(t) dt \\ &= 0 + \int_1^x t \frac{\ln(t)}{t^2} dt = \int_1^x \frac{1}{t} \ln(t) dt \\ &= \left[\frac{\ln(t)^2}{2} \right]_1^x = \frac{\ln(x)^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x tf(t) dt = +\infty$ donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ diverge et X n'admet pas d'espérance. \square

Solution de l'exercice 9.

1. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \int_0^{2a} tf(t) dt \\ &= \int_0^{2a} \frac{t^2}{2a^2} dt = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{2a^2} \times \frac{8a^3}{3} = \frac{4}{3}a. \end{aligned}$$

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{2a} t^2 f(t) dt \\ &= \int_0^{2a} \frac{t^3}{2a^2} dt = \frac{1}{2a^2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^{2a} \\ &= \frac{1}{2a^2} \times \frac{16a^4}{4} = 2a^2. \end{aligned}$$

D'après la définition de la variance,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 2a^2 - \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{2}{9}a^2.$$

\square

Solution de l'exercice 10.

1. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt \\ &= \int_0^a tf(t) dt + \int_a^{2a} tf(t) dt \\ &= \int_0^a \frac{t^2}{a^2} dt + \int_a^{2a} t \frac{2a-t}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^a t^2 dt + \frac{2a}{a^2} \int_a^{2a} t dt - \frac{1}{a^2} \int_a^{2a} t^2 dt \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^a + \frac{2}{a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{a}{3} + \frac{1}{a} ((2a)^2 - a^2) - \frac{1}{3a^2} ((2a)^3 - a^3) \\ &= a \left(\frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = a. \end{aligned}$$

2. Comme f est nulle en dehors d'un segment, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \\ &= \int_0^a \frac{t^3}{a^2} dt + \int_a^{2a} t^2 \frac{2a-t}{a^2} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^a + \frac{2}{a} \left[\frac{t^3}{3} \right]_a^{2a} - \frac{1}{a^2} \left[\frac{t^4}{4} \right]_a^{2a} \\ &= \frac{a^2}{4} + \frac{2}{3a} (8a^3 - a^3) - \frac{1}{4a^2} (16a^4 - a^4) \\ &= a^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{14}{3} - \frac{15}{4} \right) = \frac{7}{6}a^2. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{7}{6}a^2 - a^2 = \frac{a^2}{6}.$$

□

Solution de l'exercice 11.

1. Déterminons a pour que f soit une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 2.

Comme $\lim_{t \rightarrow 2^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 2.

Comme $\lim_{t \rightarrow 2^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} a e^{2-t} = a$, alors f admet une limite finie à droite en 2.

Finalement, f est bien continue sur \mathbb{R} sauf en 2 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

* Comme la fonction exponentielle est positive, la fonction f est à valeurs positives si et seulement si $a \geq 0$.

* Comme f est nulle sur $] -\infty, 2[$, pour tout $x \geq 2$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_2^x a e^{2-t} dt = a e^2 \int_2^x e^{-t} dt \\ &= a e^2 [-e^{-t}]_2^x = a e^2 (-e^{-x} + e^{-2}). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = a e^2 \times e^{-2} = a.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x \leq 2$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

* Si $x \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^2 f(t) dt + \int_2^x f(t) dt \\ &= e^2 (-e^{-x} + e^{-2}), \text{ d'après 1.} \\ &= 1 - e^{2-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - e^{2-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. a) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([X \leq 3]) = F(3) = 1 - e^{2-3} = 1 - e^{-1}.$$

b) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([1 < X < 2]) = F(2) - F(1) = 0 - 0 = 0.$$

c) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([0 < X < 3]) = F(3) - F(0) = 1 - e^{-1} - 0 = 1 - e^{-1}.$$

d) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([X \geq 4]) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{2-4}) = e^{-2}.$$

4. a) Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}([Y + 2 \leq x]) = \mathbf{P}([Y \leq x - 2]).$$

* Si $x - 2 \leq 0$, soit $x \leq 2$, alors

$$F_Z(x) = 0.$$

* Si $x - 2 \geq 0$, soit $x \geq 2$, alors

$$F_Z(x) = 1 - e^{-(x-2)} = 1 - e^{2-x}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 - e^{2-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) Comme X et Z ont même fonction de répartition, alors elles ont même loi. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[Y + 2] = \mathbf{E}[Y] + 2 = 3.$$

□

Solution de l'exercice 12.

1. Déterminons a pour que f soit une densité de probabilité.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 3.

Comme $\lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} 0 = 0$, alors f admet une limite finie à gauche en 3.

Comme $\lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} a e^{3-t} = a$, alors f admet une limite finie à droite en 3.

Finalement, f est bien continue sur \mathbb{R} sauf en 3 où elle admet des limites finies à gauche et à droite.

* Comme la fonction exponentielle est positive, la fonction f est positive si et seulement si $a \geq 0$.

* Comme f est nulle sur $] -\infty, 3[$, pour tout $x \geq 3$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x f(t) dt &= \int_3^x a e^{3-t} dt = a e^3 \int_3^x e^{-t} dt \\ &= a e^3 [-e^{-t}]_3^x = a e^3 (-e^{-x} + e^{-3}). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = a e^3 \times e^{-3} = a.$$

Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = 1$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

* Si $x \leq 3$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

* Si $x \geq 3$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^3 f(t) dt + \int_3^x f(t) dt \\ &= e^3 (-e^{-x} + e^{-3}), \text{ d'après 1.} \\ &= 1 - e^{3-x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - e^{3-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. a) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([X \leq 3]) = F(3) = 0.$$

b) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([1 < X < 2]) = F(2) - F(1) = 0 - 0 = 0.$$

c) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([0 < X < 5]) = F(5) - F(0) = 1 - e^{3-5} - 0 = 1 - e^{-2}.$$

d) D'après la définition de F ,

$$\mathbf{P}([X \geq 4]) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{3-4}) = e^{-1}.$$

4. a) Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors

$$\mathbf{E}[Y] = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = 1.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Z(x) = \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}([Y + 3 \leq x]) = \mathbf{P}([Y \leq x - 3]).$$

* Si $x - 3 \leq 0$, soit $x \leq 3$, alors

$$F_Z(x) = 0.$$

* Si $x - 3 \geq 0$, soit $x \geq 3$, alors

$$F_Z(x) = 1 - e^{-(x-3)} = 1 - e^{3-x}.$$

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - e^{3-x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

c) Comme X et Z ont même fonction de répartition, alors elles ont même loi. Ainsi,

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[Y + 3] = \mathbf{E}[Y] + 3 = 4.$$

□

III - Transformation de variables aléatoires

Solution de l'exercice 13. Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([3U \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{x}{3}\right]\right) = F_U\left(\frac{x}{3}\right).$$

* Si $\frac{x}{3} \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors $F_X(x) = 0$.

* Si $0 \leq \frac{x}{3} \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq 3$, alors $F_X(x) = \frac{x}{3}$.

* Si $\frac{x}{3} \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 3$, alors $F_X(x) = 1$.

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité f_X de X est donnée par la dérivée de F_X en les points où F_X est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 3])$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([U + 1 \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq x - 1]) \\ &= F_U(x - 1). \end{aligned}$$

* Si $x - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$, alors $F_Y(x) = 0$.

* Si $0 \leq x - 1 \leq 1$, c'est-à-dire $1 \leq x \leq 2$, alors $F_Y(x) = x - 1$.

* Si $x - 1 \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 2$, alors $F_Y(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par la dérivée de F_Y en les points où F_Y est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leq x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leq 2(x - 1)]) \\ &= F_X(2(x - 1)). \end{aligned}$$

* Si $2(x - 1) \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$, alors $F_Z(x) = 0$.

* Si $0 \leq 2(x - 1) \leq 3$, c'est-à-dire $1 \leq x \leq \frac{5}{2}$, alors $F_Z(x) = \frac{2(x-1)}{3}$.

* Si $2(x - 1) \geq 3$, c'est-à-dire $x \geq \frac{5}{2}$, alors $F_Z(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}(x-1) & \text{si } x \in [1, \frac{5}{2}] \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Une densité f_Z de Z est donnée par la dérivée de F_Z en les points où F_Z est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1, \frac{5}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([1, \frac{5}{2}])$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leq x]) = \mathbf{P}([X^2 \leq x]).$$

- * Si $x \leq 0$, alors $[X^2 \leq x]$ est l'événement impossible et $F_W(x) = 0$.
- * Si $x \geq 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([X \leq \sqrt{x}]) = F_X(\sqrt{x}).$$

- * Si $\sqrt{x} \leq 3$ c'est-à-dire $0 \leq x \leq 9$, alors $F_W(x) = \frac{\sqrt{x}}{3}$.
- * Si $\sqrt{x} \geq 3$, c'est-à-dire $x \geq 9$, alors $F_W(x) = 1$.

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{3} & \text{si } x \in [0, 9] \\ 1 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}.$$

Une densité f_W de W est donnée par la dérivée de F_W en les points où F_W est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{6\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 9[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leq x]) = \mathbf{P}([\ln(X+1) \leq x]) = \mathbf{P}([X \leq e^x - 1]) \\ &= F_X(e^x - 1). \end{aligned}$$

- * Si $e^x - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $e^x \leq 1$, soit $x \leq 0$, alors $F_H(x) = 0$.
- * Si $0 \leq e^x - 1 \leq 3$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq \ln(4)$, alors $F_H(x) = \frac{e^x - 1}{3}$.
- * Si $e^x - 1 \geq 3$, c'est-à-dire $x \geq \ln(4)$, alors $F_H(x) = 1$.

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(4) \\ 1 & \text{si } x \geq \ln(4) \end{cases}.$$

Une densité f_H de H est donnée par la dérivée de F_H en les points où F_H est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(4) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(X+1) \leq x]) = \mathbf{P}([X \geq e^{-x} - 1]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X \leq e^{-x} - 1]) \\ &= 1 - F_X(e^{-x} - 1). \end{aligned}$$

- * Si $e^{-x} - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $-x \leq 0$ soit $x \geq 0$, alors

$$F_E(x) = 1 - 0 = 1.$$

- * Si $0 \leq e^{-x} - 1 \leq 3$, c'est-à-dire $-\ln(4) \leq x \leq 0$, alors

$$F_E(x) = 1 - \frac{e^{-x} - 1}{3}.$$

- * Si $e^{-x} - 1 \geq 3$, c'est-à-dire $x \leq -\ln(4)$, alors $F_E(x) = 1 - 1 = 0$.

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\ln(4) \\ 1 - \frac{e^{-x} - 1}{3} & \text{si } -\ln(4) \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_E de E est donnée par la dérivée de F_E en les points où F_E est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{3} & \text{si } -\ln(4) \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

Solution de l'exercice 14. Rappelons que

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_X(x) = \mathbf{P}([X \leq x]) = \mathbf{P}([4U \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{x}{4}\right]\right) = F_U\left(\frac{x}{4}\right).$$

- * Si $\frac{x}{4} \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors $F_X(x) = 0$.
- * Si $0 \leq \frac{x}{4} \leq 1$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq 4$, alors $F_X(x) = \frac{x}{4}$.
- * Si $\frac{x}{4} \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 4$, alors $F_X(x) = 1$.

Finalement,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } x \in [0, 4] \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}.$$

Une densité f_X de X est donnée par la dérivée de F_X en les points où F_X est dérivable, soit

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 4])$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([U + 2 \leq x]) = \mathbf{P}([U \leq x - 2]) \\ &= F_U(x - 2). \end{aligned}$$

- * Si $x - 2 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 2$, alors $F_Y(x) = 0$.
- * Si $0 \leq x - 2 \leq 1$, c'est-à-dire $2 \leq x \leq 3$, alors $F_Y(x) = x - 2$.
- * Si $x - 2 \geq 1$, c'est-à-dire $x \geq 3$, alors $F_Y(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 2 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité f_Y de Y est donnée par la dérivée de F_Y en les points où F_Y est dérivable, soit

$$f_Y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [2, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([2, 3])$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbf{P}([Z \leq x]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{2}X + 1 \leq x\right]\right) = \mathbf{P}([X \leq 2(x - 1)]) \\ &= F_X(2(x - 1)). \end{aligned}$$

- * Si $2(x - 1) \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 1$, alors $F_Z(x) = 0$.
- * Si $0 \leq 2(x - 1) \leq 4$, c'est-à-dire $1 \leq x \leq 3$, alors $F_Z(x) = \frac{2(x-1)}{4}$.
- * Si $2(x - 1) \geq 4$, c'est-à-dire $x \geq 3$, alors $F_Z(x) = 1$.

Finalement,

$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x - 1) & \text{si } x \in [1, 3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}.$$

Une densité f_Z de Z est donnée par la dérivée de F_Z en les points où F_Z est dérivable, soit

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On reconnaît ainsi que $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 3])$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([W \leq x]) = \mathbf{P}([X^2 \leq x]).$$

- * Si $x < 0$, alors $[X^2 \leq x]$ est l'événement impossible et $F_W(x) = 0$.
- * Si $x \geq 0$, comme la fonction racine carrée est croissante et bijective,

$$F_W(x) = \mathbf{P}([X \leq \sqrt{x}]) = F_X(\sqrt{x}).$$

- * Si $0 \leq \sqrt{x} \leq 4$ c'est-à-dire $0 \leq x \leq 16$, alors $F_W(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$.

* Si $\sqrt{x} \geq 4$, c'est-à-dire $x \geq 16$, alors $F_W(x) = 1$.

Finalement,

$$F_W(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{4} & \text{si } x \in [0, 16] \\ 1 & \text{si } x \geq 16 \end{cases}.$$

Une densité f_W de W est donnée par la dérivée de F_W en les points où F_W est dérivable, soit

$$f_W(x) = \begin{cases} \frac{1}{8\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, 16[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_H(x) &= \mathbf{P}([H \leq x]) = \mathbf{P}([\ln(X+1) \leq x]) = \mathbf{P}([X \leq e^x - 1]) \\ &= F_X(e^x - 1). \end{aligned}$$

* Si $e^x - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors $F_H(x) = 0$.

* Si $0 \leq e^x - 1 \leq 4$, c'est-à-dire $0 \leq x \leq \ln(5)$, alors $F_H(x) = \frac{e^x - 1}{4}$.

* Si $e^x - 1 \geq 4$, c'est-à-dire $x \geq \ln(5)$, alors $F_H(x) = 1$.

Finalement,

$$F_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(5) \\ 1 & \text{si } x \geq \ln(5) \end{cases}.$$

Une densité f_H de H est donnée par la dérivée de F_H en les points où F_H est dérivable, soit

$$f_H(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq \ln(5) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la définition,

$$\begin{aligned} F_E(x) &= \mathbf{P}([E \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(X+1) \leq x]) = \mathbf{P}([X \geq e^{-x} - 1]) \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\left[U \leq \frac{e^{-x} - 1}{4}\right]\right) \\ &= 1 - F_X\left(\frac{e^{-x} - 1}{4}\right). \end{aligned}$$

* Si $e^{-x} - 1 \leq 0$, c'est-à-dire $x \geq 0$, alors $F_E(x) = 1 - 0 = 1$.

* Si $0 \leq e^{-x} - 1 \leq 4$, c'est-à-dire $-\ln(5) \leq x \leq 0$, alors

$$F_E(x) = 1 - \frac{e^{-x} - 1}{4}.$$

* Si $e^{-x} - 1 \geq 4$, c'est-à-dire $x \leq -\ln(5)$, alors $F_E(x) = 0$.

Finalement,

$$F_E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\ln(5) \\ 1 - \frac{e^{-x} - 1}{4} & \text{si } -\ln(5) \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Une densité f_E de E est donnée par la dérivée de F_E en les points où F_E est dérivable, soit

$$f_E(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{4} & \text{si } -\ln(5) \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

□

Solution de l'exercice 15.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt$.

* Si $x \leq 0$, alors

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0.$$

* Si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^x f_n(t) dt \\ &= 0 + \int_0^x nt^{n-1} dt = n \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x \\ &= x^n. \end{aligned}$$

* Si $x \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_{-\infty}^x f_n(t) dt = \int_{-\infty}^0 f_n(t) dt + \int_0^1 f_n(t) dt + \int_1^x f_n(t) dt \\ &= 0 + \int_0^1 nt^{n-1} dt + 0 = n \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

2. Comme f_n est nulle en dehors d'un segment, X_n admet une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_n] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t) dt = \int_0^1 t \times n t^{n-1} dt \\ &= n \int_0^1 t^n dt = n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les définitions,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathbf{P}([Y_n \leq x]) = \mathbf{P}([-\ln(X_n) \leq x]) = \mathbf{P}([X_n \geq e^{-x}]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([X_n \leq e^{-x}]) \\ &= 1 - F_n(e^{-x}). \end{aligned}$$

* La quantité e^{-x} est toujours strictement positive.

* Si $0 \leq e^{-x} \leq 1$, c'est-à-dire $x \geq 0$, alors

$$G_n(x) = 1 - (e^{-x})^n = 1 - e^{-nx}.$$

* Si $e^{-x} \geq 1$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors

$$G_n(x) = 1 - 1 = 0.$$

Finalement,

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-nx} & \text{sinon} \end{cases}.$$

4. D'après la question précédente, Y_n est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre n .

5. D'après les propriétés des lois exponentielles,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{1}{n} \text{ et } \mathbf{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2}.$$

□

Solution de l'exercice 16.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

* Si $x < a$, alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0.$$

* Si $x \geq a$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^x f(t) dt \\ &= 0 + \int_a^x 2e^{2a} e^{-2t} dt \\ &= 2e^{2a} \left[\frac{1}{-2} e^{-2t} \right]_a^x \\ &= 2e^{2a} \left(\frac{e^{-2a}}{2} - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \\ &= 1 - e^{2a-2x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 1 - e^{2(a-x)} & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après les définitions,

$$G(x) = \mathbf{P}([Y \leq x]) = \mathbf{P}([X \leq x + a]) = F(x + a).$$

* Si $x + a \leq a$, c'est-à-dire $x \leq 0$, alors $G(x) = 0$.

* Si $x + a \geq a$, c'est-à-dire $x \geq 0$, alors

$$G(x) = 1 - e^{2(a-(x+a))} = 1 - e^{-2x}.$$

Finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{sinon} \end{cases}.$$

3. D'après la question précédente, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$. Ainsi,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1}{4}.$$

4. En utilisant les définitions,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}[Y + a] = \mathbf{E}[Y] + a = \frac{1}{2} + a. \\ \mathbf{V}(X) &= \mathbf{V}(Y + a) = \mathbf{V}(Y) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

IV - Lois usuelles

Solution de l'exercice 17.

1. Comme X suit une loi normale centrée réduite, $\mathbf{P}([X \leq 2]) \simeq 0,9772$.

2. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X > 2,51]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq 2,51]).$$

Comme X suit une loi normale centrée réduite,

$$\mathbf{P}([X > 2,51]) \simeq 1 - 0,9940 \simeq 0,006.$$

3. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$, alors $\frac{Y-5}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < 1]) &= \mathbf{P}([Y - 5 < -4]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y - 5}{2} < -2\right]\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y - 5}{2} < -2\right]\right) \\ &= \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \simeq 1 - 0,9772 \\ &\simeq 0,0228. \end{aligned}$$

4. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 4)$, alors $\frac{Y-5}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([3 < Y \leq 10]) &= \mathbf{P}([-2 < Y - 5 \leq 5]) = \mathbf{P}\left(\left[-1 < \frac{Y - 5}{2} \leq \frac{5}{2}\right]\right) \\ &= \Phi(2,5) - \Phi(-1) = \Phi(2,5) - (1 - \Phi(1)) \\ &\simeq 0,9938 - 1 + 0,8413 \\ &\simeq 0,8351. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 18.

1. Comme X suit une loi normale centrée réduite, $\mathbf{P}([X \leq 2,5]) \simeq 0,9938$.

2. D'après les propriétés des probabilités,

$$\mathbf{P}([X > 1,49]) = 1 - \mathbf{P}([X \leq 1,49]).$$

Comme X suit une loi normale centrée réduite,

$$\mathbf{P}([X > 1,49]) \simeq 1 - 0,9319 \simeq 0,0681.$$

3. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$, alors $\frac{Y-2}{3} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([Y < 1]) &= \mathbf{P}([Y - 2 < -1]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{Y - 2}{3} < -\frac{1}{3}\right]\right) \\ &\simeq \Phi(-0,33) \simeq 1 - \Phi(0,33) \simeq 1 - 0,6293 \\ &\simeq 0,3707. \end{aligned}$$

4. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 9)$, alors $\frac{Y-2}{3} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([3 < Y \leq 6]) &= \mathbf{P}([1 < Y - 2 \leq 4]) = \mathbf{P}\left(\left[\frac{1}{3} < \frac{Y - 2}{3} \leq \frac{4}{3}\right]\right) \\ &\simeq \Phi(1,33) - \Phi(0,33) \\ &\simeq 0,9082 - 0,6293 \\ &\simeq 0,2789. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 19.

1. R est le plus petit des réels R_1 et R_2 . Ainsi, $R > x$ si et seulement si R_1 et R_2 sont strictement supérieurs à x . Ainsi,

$$\begin{aligned} [R > x] &= [R_1 > x] \cap [R_2 > x] \\ \mathbf{P}([R > x]) &= \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]). \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés de la fonction de répartition et la question précédente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}([R \leq x]) = 1 - \mathbf{P}([R > x]) \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x] \cap [R_2 > x]), \text{ d'après 1.} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x]) \times \mathbf{P}([R_2 > x]), \text{ par indépendance} \\ &= 1 - \mathbf{P}([R_1 > x])^2, \text{ car } R_1 \text{ et } R_2 \text{ ont même loi} \\ &= 1 - (1 - \mathbf{P}([R_1 \leq x]))^2. \end{aligned}$$

Comme $R_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([R_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi,

* Si $x \leq 0$, alors

$$F(x) = 1 - (1 - 0)^2 = 0.$$

* Si $0 \leq x \leq 1$, alors

$$F(x) = 1 - (1 - x)^2 = x(2 - x).$$

* Si $x \geq 1$, alors

$$F(x) = 1 - (1 - 1)^2 = 1.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x(2 - x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On cherche la probabilité que le minimum des deux distances soit inférieur à 50cm, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([R \leq 0,5]) &= F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \times \left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 20.

1. T est le plus grand des réels T_1 et T_2 . Ainsi, $T \leq x$ si et seulement si T_1 et T_2 sont inférieurs à x . Ainsi,

$$\begin{aligned} [T \leq x] &= [T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x] \\ \mathbf{P}([T \leq x]) &= \mathbf{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x]). \end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les propriétés de la fonction de répartition et la question précédente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbf{P}([T \leq x]) = \mathbf{P}([T_1 \leq x] \cap [T_2 \leq x]), \text{ d'après 1.} \\ &= \mathbf{P}([T_1 \leq x]) \times \mathbf{P}([T_2 \leq x]), \text{ par indépendance} \\ &= \mathbf{P}([T_1 \leq x])^2, \text{ car } T_1 \text{ et } T_2 \text{ ont même loi} \end{aligned}$$

Comme $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, sa fonction de répartition satisfait :

$$\mathbf{P}([T_1 \leq x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Ainsi,

* Si $x \leq 0$, alors

$$F(x) = 0^2 = 0.$$

* Si $x \geq 0$, alors

$$F(x) = (1 - e^{-x})^2.$$

Finalement,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (1 - e^{-x})^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. On cherche la probabilité que le maximum de la durée de vie des piles soit supérieur à 6 mois, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([T \geq 0,5]) &= 1 - \mathbf{P}([T \leq 0,5]) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-1/2}\right)^2 \\ &= 2e^{-1/2} - e^{-1} \simeq 0,845. \end{aligned}$$

□