

T.D. XI - Convergence

Estimation

I - Inégalités

Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev ne sont pas exigibles au concours. Vous pouvez vous référer au cours pour leur formulation.

Solution de l'exercice 1.

1. Y compte le nombre de succès (être défectueux) lors d'une suite de 100 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès 0,1. Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres 100 et 0,1.

2. D'après les propriétés des lois binomiales,

$$\mathbf{E}[Y] = 100 \times 0,1 = 10.$$

3. D'après l'inégalité de Markov, comme Y est à valeurs positives,

$$\mathbf{P}(Y \geq 20) \leq \frac{\mathbf{E}[Y]}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, il y a au plus une chance sur deux qu'il y ait plus de 20 ampoules défectueuses. \square

Solution de l'exercice 2.

1. En notant X le nombre d'appels reçus en une heure, comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(4)$, alors le nombre moyen d'appel vaut $\mathbf{E}[X] = 4$.

2. Comme X est à valeurs positives, en utilisant l'inégalité de Markov,

$$\mathbf{P}(X \geq 8) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{8} = \frac{1}{2}.$$

\square

Solution de l'exercice 3. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}[X] = \lambda$ et $\mathbf{V}(X) = \lambda$. Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X - \lambda| \geq \lambda) &= \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}[X]| \geq \lambda) \\ &\leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4.

1. Comme Y compte le nombre de 1 dans une suite de 100 variables aléatoires de Bernoulli indépendantes dont la probabilité de valoir 1 vaut $\frac{1}{4}$, alors $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{1}{4})$.

2. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{1}{4})$, alors

$$\mathbf{E}[Y] = 100 \times \frac{1}{4} = 25$$

et

$$\mathbf{V}(Y) = 100 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{75}{4}.$$

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|Y - 25| \geq 10) &= \mathbf{P}(|Y - \mathbf{E}[Y]| \geq 10) \\ &\leq \frac{\mathbf{V}(Y)}{100} \\ &\leq \frac{75}{4 \times 100} \\ &\leq \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

\square

II - Convergence

Solution de l'exercice 5. On note X_i la valeur renvoyée par l'appel de la fonction `rd.randint(0, 2)`. Alors, X_i suit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers compris entre 0 et 1, soit une loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1\}$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X_i = 0) = 1/2 \text{ et } \mathbf{P}(X_i = 1) = 1/2.$$

On reconnaît ainsi que $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$.

Comme $\mathbf{s} = \sum_{i=0}^{N-1} X_i$, alors \mathbf{s}/N vaut $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_i$. Les variables X_0, \dots, X_{N-1} sont indépendantes et suivent une même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. D'après la loi des grands nombres, cette quantité vaut environ $\mathbf{E}[X_1] = \frac{1}{2}$, ce qui est conforme au résultat obtenu. \square

Solution de l'exercice 6. On note F la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0, 1]$ et on rappelle que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Commençons par remarquer que \mathbf{X} ne peut prendre que les valeurs -1 , 2 et 4 . De plus,

* \mathbf{X} vaut -1 si et seulement si $\mathbf{u} < 1/3$. Ainsi,

$$\mathbf{P}([\mathbf{X} = -1]) = \mathbf{P}([\mathbf{u} < 1/3]) = F\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

* \mathbf{X} vaut 2 si et seulement si $1/3 < \mathbf{u} < 1/3 + 1/6$. Ainsi,

* \mathbf{X} vaut 4 si et seulement si $\mathbf{u} < 1/3$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}([\mathbf{X} = 2]) &= \mathbf{P}([1/3\mathbf{u} < 1/3 + 1/6]) = F\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

* \mathbf{X} vaut 4 dans les autres cas, donc

$$\mathbf{P}([\mathbf{X} = 4]) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

La loi de \mathbf{X} peut ainsi être résumée dans le tableau suivant :

k	-1	2	4
$\mathbf{P}([\mathbf{X} = k])$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

De plus, \mathbf{s} est la somme de N réalisations de \mathbf{X} indépendantes. Ainsi, d'après la loi des grands nombres,

$$\frac{\mathbf{s}}{N} \simeq \mathbf{E}[X] = -\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{4}{2} = 2. \quad \square$$

III - Estimation

Solution de l'exercice 7.

1.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en a .

Comme $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} 0 = 0$ et $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \frac{3a^3}{t^4} = \frac{3}{a}$, la fonction f admet des limites finies à droite et à gauche en a .

* Comme $a > 0$, alors $a^3 > 0$ et la fonction f est positive sur $[a, +\infty[$. Ainsi, la fonction f est positive ou nulle sur \mathbb{R} .

* Soit $M \geq 0$. Comme f est nulle sur $]-\infty, a]$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^M f(t) dt &= \int_a^M \frac{3a^3}{t^4} dt = 3a^3 \int_a^M t^{-4} dt \\ &= 3a^3 \left[\frac{t^{-4+1}}{-4+1} \right]_a^M \\ &= 3a^3 \left(\frac{1}{3a^3} - \frac{1}{3M^3} \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M^3} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 3a^3 \left(\frac{1}{3a^3} - 0 \right) = 1.$$

2. Soit $M \geq 0$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^M tf(t) dt &= \int_a^M \frac{3a^3}{t^3} dt = 3a^3 \left[\frac{t^{-2}}{-2} \right]_a^M \\ &= 3a^3 \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2M^2} \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2M^2} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$ converge et

$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt = \frac{3a^3}{2a^2} = \frac{3a}{2}.$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^M t^2 f(t) dt &= \int_a^M \frac{3a^3}{t^2} dt = 3a^3 \left[\frac{t^{-1}}{-1} \right]_a^M \\ &= 3a^3 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{M} \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{M} = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ converge et

$$\mathbf{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \frac{3a^3}{a} = 3a^2.$$

D'après la formule de Koenig-Huyggens,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = 3a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2 \\ &= \left(3 - \frac{9}{4}\right) a^2 = \frac{3a^2}{4}. \end{aligned}$$

3. Posons $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[\bar{X}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{3a}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Ainsi, \bar{X} est un estimateur ponctuel de $\frac{3a}{2}$.

4. a) D'après les relations précédentes,

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i &\simeq \frac{3a}{2} \\ \frac{603}{100} &\simeq \frac{3a}{2} \\ a &\simeq \frac{603}{100} \times \frac{2}{3} \\ &\simeq \frac{402}{100} \simeq 4,02. \end{aligned}$$

b) Comme les variables aléatoires X_1, \dots, X_{100} sont indépendantes,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(Y) &= \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} \mathbf{V}(X_i) = 100\mathbf{V}(X) \\ &= 100 \times \frac{3a^2}{4} = 75a^2. \end{aligned}$$

c) Comme $\mathbf{E}\left[\frac{1}{n}Y\right] = \frac{3a}{2}$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}Y - \frac{3a}{2}\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}Y - \mathbf{E}\left[\frac{1}{n}Y\right]\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \frac{\mathbf{V}\left(\frac{1}{n}Y\right)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{\mathbf{V}(Y)}{n^2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{75a^2}{100^2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{3a^2}{400\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 8.

1.

* D'après les théorèmes généraux, la fonction f est continue sauf éventuellement en 0 et en a .

Comme $\lim_{t \rightarrow 0^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} 0 = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3t^2}{a^2} = \frac{3 \times 0^2}{a^2} = 0$, alors la fonction f admet des limites finies à gauche et à droite en 0.

Comme $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} 0 = 0$ et $\lim_{t \rightarrow a^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow a^-} \frac{3t^2}{a^3} = \frac{3a^2}{a^3} = \frac{3}{a}$, alors la fonction f admet des limites finies à gauche et à droite en a .

* Comme $a > 0$, alors $a^3 > 0$ et f est positive sur $[0, a]$. Ainsi, f est positive ou nulle sur \mathbb{R} .

* Comme f est nulle en dehors du segment $[0, a]$, alors

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt &= \int_0^a \frac{3t^2}{a^3} dt = \frac{3}{a^3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{a^3} \times \frac{a^3}{3} = 1.\end{aligned}$$

Finalement, f est bien une densité de probabilité.

2. D'après les définitions,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt \\ &= \int_0^a \frac{3t^3}{a^3} dt = \frac{3}{a^3} \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{a^3} \times \frac{a^4}{4} = \frac{3a}{4}.\end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt \\ &= \int_0^a \frac{3t^4}{a^3} dt = \frac{3}{a^3} \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^a \\ &= \frac{3}{a^3} \times \frac{a^5}{5} = \frac{3a^2}{5}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de Kœnig-Huyggens,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(X) &= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]^2 = \frac{3a^2}{5} - \left(\frac{3a}{4} \right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{5} - \frac{9}{16} \right) a^2 = \frac{3}{80} a^2.\end{aligned}$$

3. D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}[Y_n] = \frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{4}{3n} \sum_{k=1}^n \frac{3a}{4} = a.$$

Comme les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(Y_n) &= \frac{16}{9n^2} \mathbf{V} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right) = \frac{16}{9n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{V}(X_k) \\ &= \frac{16}{9n^2} \times n \times \frac{3}{80} a^2 \\ &= \frac{a^2}{15n}.\end{aligned}$$

4. Comme $\mathbf{E}[Y_n] = a$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\begin{aligned}0 \leq \mathbf{P}(|Y_n - a| \geq \varepsilon) &= \mathbf{P}(|Y_n - \mathbf{E}[Y_n]| \geq \varepsilon) \\ &\leq \frac{\mathbf{V}(Y_n)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{a^2}{15n\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{15n\varepsilon^2} = 0$, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(|Y_n - a| \geq \varepsilon) = 0.$$

□

Solution de l'exercice 9.

1. a) X compte le nombre de succès (prélever un loup) dans une suite de 30 expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès valant $\frac{10}{N}$. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(30, \frac{10}{N})$.

b) D'après les propriétés des lois binomiales,

$$\mathbf{E}[X] = \frac{300}{N} \text{ et } \mathbf{V}(X) = \frac{300(N-10)}{N^2}.$$

c) D'après la question précédente, $\mathbf{E}[\frac{X}{300}] = \frac{1}{N}$ et $\frac{X}{300}$ est donc un estimateur ponctuel de $\frac{1}{N}$.

2. a) Y est l'instant de premier succès dans un schéma de Bernoulli dont la probabilité de succès vaut $\frac{10}{N}$. Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{10}{N})$.

b) En utilisant les propriétés de la loi géométrique,

$$\mathbf{E}[Y] = \frac{N}{10} \text{ et } \mathbf{V}(Y) = \frac{1 - \frac{10}{N}}{\frac{100}{N^2}} = \frac{N(N-10)}{100}.$$

□