Stanislas
T.D. 7

Arbres

MPSI
1 & 2
2020-2021

■ ■ ■

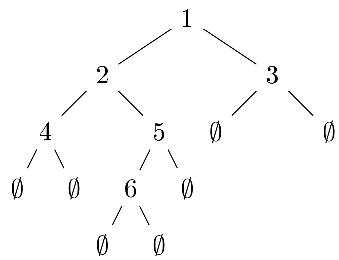
Les arbres binaires et généraux non étiquetés sont définis par les types

```
type bintree = Empty | Nodeb of bintree * bintree;;
type tree = EmptyTree | Node of tree list;;
```

Exercice 1. On, considère la fonction `f` définie inductivement par

```
let rec f a1 a2 =
  match a1 with
  | Empty -> a2
  | Node (a3, a4) -> f a3 (Node (a2, a4));;
```

1. On considère l'arbre `A` suivant (dont les nœuds ont été numérotés pour une meilleure compréhension). Calculer `f A Empty`, noté `B`, puis `f B Empty`.



2. Montrer que la fonction termine quels que soient les arbres passés en entrée.

3. Montrer, pour tout arbre `A`, l'égalité `f (f A Empty) Empty = A`.
On pourra montrer que `f (f A B) Empty = f B A`.

Exercice 2. (Dénombrement) L'objectif de cet exercice est de dénombrer les arbres binaires. La démonstration est relativement longue et on pourra donc se contenter de dessins compréhensibles pour comprendre les bijections mises en œuvre.

On note B_n le nombre d'arbres binaires non étiquetés à n nœuds.

1. Décrire l'ensemble des arbres binaires à 0, 1, 2, 3 puis 4 nœuds et en déduire les valeurs de $B_0, \dots, B_4$.
On remarquera qu'être un fils à droite, ce n'est pas pareil qu'être un fils à gauche. On pourra ensuite utiliser l'excellent site `https://oeis.org/` *pour essayer de deviner la suite de la suite.*

2. Montrer que (B_n) est solution de l'équation de récurrence

$$B_0 = 1,\ B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B_k B_{n-k}.$$

On souhaite par la suite déterminer l'entier B_n en fonction de n.
On rappelle que l'ensemble $\mathscr{B}_n$ des arbres binaires à n nœuds est en bijection avec l'ensemble $\mathscr{G}_{n+1}$ des arbres généraux à $n+1$ nœuds. On aura ainsi déterminé le cardinal de $\mathscr{G}_{n+1}$.

3. On considère la fonction suivante qui à tout arbre non étiqueté associe une suite de -1 et de 1.

```
let rec sauts arbre =
  let rec aux foret h =
    match foret with
    | [] -> []
    | Node(q1)::q ->
      let c1 = aux q1 (h+1) and c2 = aux q h in
      [1] @ c1 @ [-1] @ c2
  in match arbre with
  | EmptyTree -> []
  | Node (fils) -> aux fils 0;;
```

a) Remarquer que
`sauts (Node [Node [Node []; Node []]; Node []; Node []]);;` vaut `[1; 1; -1; 1; -1; -1; 1; -1; 1; -1]`.
Représenter graphiquement l'arbre passé en argument et inscrire les éléments de cette liste sur les arêtes en faisant le tour de l'arbre (dans le sens trigonométrique).
En déduire l'interprétation de la fonction `sauts`.

b) Étant donné un arbre T à n nœuds, calculer la longueur de la liste retournée par `sauts` T.

c) Soit t un arbre général à n nœuds et $[a_0; \dots; a_{2n-1}] =$ `sauts` t la liste associée. On note $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. Montrer que pour tout entier naturel $k \in [\![0, 2n]\!]$, $a_k \geqslant 0$ avec égalité si $k \in \{0, 2n\}$.
Un chemin de Dyck de longueur n est une suite $(\gamma_0, \dots, \gamma_n)$ d'entiers positifs telle que $\gamma_0 = \gamma_n = 0$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $|\gamma_{k+1} - \gamma_k| = 1$.

4. Montrer que $B_n = D_{2n}$.

5. Dans cette question, on souhaite montrer que $D_{2n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Soit $\Gamma_{2n}(a,b)$ l'ensemble des chemins de longueur $2n$, de pas appartenant à $\{-1,1\}$ tels que $\gamma_0 = a$ et $\gamma_{2n} = b$.

a) Un chemin γ est une succession de symboles 1 (au nombre de m comme montées) et de symboles -1 (au nombre de d comme descentes). Si $\gamma \in \Gamma_{2n}(a,b)$ déterminer m et d.
On pourra calculer $m+d$ et $m-d$.

b) En déduire $|\Gamma_{2n}(a,b)|$.

On note $\Gamma_{2n}^{\geqslant 0}$ (resp. $\Gamma_{2n}^{>0}$) l'ensemble des chemins tels que pour tout $i \in [\![0,2n]\!]$, $\gamma_i \geqslant 0$ (resp. > 0) et Γ_{2n}^{0} l'ensemble des chemins qui rencontrent l'axe des abscisses.

c) Montrer que $\left|\Gamma_{2n}^{\geqslant 0}(0,0)\right| = \left|\Gamma_{2n}^{>0}(1,1)\right|$.
On pourra se contenter d'un dessin expliquant la bijection.

d) Montrer que $\left|\Gamma_{2n}^{>0}(1,1)\right| = |\Gamma_{2n}(1,1)| - \left|\Gamma_{2n-2}^{0}(1,1)\right|$.

e) Montrer que $\left|\Gamma_{2n}^{0}(1,1)\right| = |\Gamma_{2n}(-1,1)|$.
Cette égalité peut se démontrer en utilisant le principe de réflexion. On pourra dessiner un chemin de $\Gamma_{2n-2}^{0}(1,1)$ et en déduire un chemin de $\Gamma_{2n-1}(-1,1)$ obtenu en effectuant une réflexion par rapport à l'axe des abscisses de la première partie du chemin.

f) En déduire que
$$\left|\Gamma_{2n}^{\geqslant 0}(0,0)\right| = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

L'entier $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ est le n-ème nombre de Catalan.

6. En déduire la valeur de B_n.