▪ Chapitre 8 ▪
Suites et séries de fonctions

Notations.
▪ I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
▪ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f désignent des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I. Modes de convergence

I.1 Convergence simple

Définition 1 (Convergence simple).
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* sur I vers la fonction f si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, i.e.

$$\forall\, x \in I, \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, n \geqslant n_{x,\varepsilon},\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 1. Étudier la convergence simple des fonctions définies par

1. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ sur $\mathbb{R}_+$. **2.** $f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ sur $\mathbb{R}$. **3.** $f_n(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m}$ sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 1 (Propriétés stables par convergence simple).
On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f.

(i). Si, à partir d'un certain, f_n est à valeurs positives, alors f est à valeurs positives.

(ii). Si, à partir d'un certain rang, $x \mapsto f_n(x)$ est croissante, alors f est croissante.

Exercice 2.

1. Pour tout x réel et tout entier naturel non nul, on pose $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis étudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier naturel n, on pose $f_n(x) = n^2x(1-x^2)^n$. Prouver la convergence simple sur $[0,1]$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis déterminer le comportement asymptotique de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Pour tout $x \in]0,1]$ et tout entier naturel n non nul, on pose $f_n(x) = n^2x$ si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = \frac{1}{x}$ si $\frac{1}{n} < x \leqslant 1$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,1]$. Étudier la convergence des intégrales $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

I.2 Convergence uniforme

Définition 2 (Convergence uniforme).
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I vers la fonction f si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, (x,n) \in I \times \mathbb{N},\ [n \geqslant n_\varepsilon\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon]\,.$$

Exercice 3. Pour tout entier naturel n, on pose $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que, pour tout réel $a \in]0,1[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction nulle.

Propriété 2 (Simple vs. Uniforme).

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f.

Exercice 4. Pour tout entier naturel n, on pose $f_n : x \mapsto x^n$. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Définition 3 (Norme infinie).

Si f est une fonction bornée sur I, la *norme infinie* de f sur I est

$$\|f\|_{\infty,I} = \sup_{x\in I} |f(x)|\,.$$

Propriété 3 (Norme de la convergence uniforme).

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f si et seulement si, à partir d'un certain rang, la fonction $f_n - f$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,I} = 0$.

Exercice 5.

1. Pour tout réel positif x et tout entier naturel n, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n}\,\mathrm{e}^{-nx}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on note $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais que f_n n'est pas bornée.

3. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si $\sum f_n$ converge simplement sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right\|_{\infty,I} = 0$.

Propriété 4 (Convergence uniforme & Majoration).

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si et seulement s'il existe une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que, à partir d'un certain rang,

$$\forall\, x \in I,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n.$$

Exercice 6.

1. Montrer que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k}\right)$ converge uniformément sur $[1,2]$.

2. a) On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I. Alors, $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) Pour tout réel x et tout entier naturel n, on pose $f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais non uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété 5 (Convergence uniforme sur tout segment).

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f. Alors, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Exercice 7. Montrer que la réciproque est fausse.

I.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition 4 (Convergence normale).

Soit (f_n) une suite de fonctions bornées sur I. La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge normalement* sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

Exercice 8.

1. Montrer que s'il existe une suite (a_n) telle que $\sum a_n$ converge et $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in I, |f_n(x)| \leqslant a_n$, alors $\sum f_n$ converge normalement sur I.

2. Montrer que $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Propriété 6.

Si $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge normalement sur I, alors $\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)$ converge uniformément sur I.

Exercice 9. En étudiant $\sum \frac{(-1)^n}{x+n}$ sur $[1, 2]$, montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.

Propriété 7 (Convergence normale sur tout segment).

On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur I. Alors, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Exercice 10. En utilisant la série géométrique, montrer que la réciproque de ce théorème est fausse.

II. Propriétés préservées par convergence uniforme

Notation.

■ Dans toute cette section, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f.

Exercice 11.

1. a) Bornées. Si, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est bornée sur I, alors f est bornée sur I.

b) Pour tout réel $x \in]0, 1[$ et pour tout entier naturel n, on note $f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0, 1[$.

2. Combinaisons linéaires. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers g. Alors, $(\lambda f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\lambda f + g$.

3. Gare aux Produits. Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais que (f_n^2) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

II.1 Convergence uniforme & Continuité

Théorème 1 (Préservation de la continuité).

On suppose que (f_n) converge uniformément sur I vers f. Si, pour tout entier naturel n la fonction f_n est continue sur I, alors la fonction f est continue sur I.

Exercice 12.

1. Pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout entier naturel n, on pose $f_n(x) = x^n$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2. Montrer que ce résultat reste vrai si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I.

3. Pour tout x réel, on définit sur $[0,1]$ la fonction continue par morceaux f_n par $f_n(x) = 0$ si $x \leqslant \frac{1}{n}$ et, pour tout $k \in [1, n-1]$, $f_n(x) = \frac{1}{k}$ si $x \in \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ mais que sa limite n'est pas continue par morceaux.

Corollaire 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I telles que $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Exercice 13.

1. Montrer que ce résultat reste vrai si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I.

2. Montrer que $\exp : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est continue sur $]1, +\infty[$.

Théorème 3 (Théorème de la double limite, Admis).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers une fonction f et $x_0 \in \overline{I}$. S'il existe une suite de réels $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n, $\lim_{t\to x_0} f_n(t) = \ell_n$, alors $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{t\to x_0} f(t) = \lim_{n\to+\infty} \ell_n.$$

Corollaire 4.

Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et $x_0 \in \overline{I}$. Si, pour tout entier naturel n, f_n converge en x_0 et $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors $\sum \left(\lim_{t\to x_0} f_n(t)\right)$ converge vers un scalaire ℓ et $\lim_{x\to x_0} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \ell$.

Exercice 14.

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

2. En utilisant la série géométrique, montrer que ce résultat ne s'applique pas si la convergence est uniforme sur tout segment de I.

II.2 Convergence uniforme & Intégration

Théorème 5 (Interversion limite / intégrale).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur le segment $[a,b]$. Alors,

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 15.

1. Montrer que ce résultat peut être faux si la convergence est simple mais non uniforme.

2. Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{x-k}{n} & \text{si } x \in \left[k, k+\frac{1}{2}\right], \ k \leqslant n \\ 2 \cdot \frac{k+1-x}{n} & \text{si } x \in \left[k+\frac{1}{2}, k+1\right], \ k \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.

b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Corollaire 6 (Interversion série / intégrale).

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur le segment $[a, b]$. Alors,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 16.

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

2. Montrer que, sur un ensemble à préciser,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

II.3 Convergence uniforme & Dérivation

Théorème 7 (Limite de dérivées).

Soit h une fonction définie sur I telle que

(i). $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(ii). $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f,

(iii). $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers h.

Alors, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f' = h$. De plus, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers f.

Exercice 17.

1. En étudiant la suite $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}$ sur $[-1, 1]$, montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction valeur absolue, mais que (f'_n) ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.

2. En étudiant la suite $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0 mais que la suite des dérivées ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

3. En étudiant la suite $f_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}$, montrer que (f_n) converge simplement mais non uniformément sur $\mathbb{R}_+$ alors que (f'_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Corollaire 8 (Extension $\mathscr{C}^k$).

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $(g_0, \dots, g_k)$ des fonctions sur I tels que

(i). $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I,

(ii). $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers g_k,

(iii). pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers g_j.

Alors, la fonction g_0 est de classe $\mathscr{C}^k$ et pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $g_j = g_0^{(j)}$.

Corollaire 9.

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I telles que

(i). Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

(ii). $\sum f_n'$ converge uniformément sur I.

(iii). $\sum f_n$ converge simplement sur I,

Alors, la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Exercice 18.

1. Étendre le résultat précédent aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$.

2. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et que $\zeta'(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^x}$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout réel t, on pose $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^k}{k!}$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier naturel k, $g^{(k)} : t \mapsto z^k \operatorname{e}^{tz}$.

Convergence d'une suite de fonctions de répartition

Exercice 19. (Cas particulier du deuxième théorème de Dini) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

(i). X_n est à valeurs dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$.

(ii). $\mathbb{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \alpha_n \left(\operatorname{e}^{\frac{k}{n}} - 1\right)$, où $\alpha_n = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\operatorname{e}^{k/n} - 1\right)}$.

(iii). F_n est la fonction de répartition de X_n.

1. Déterminer un équivalent de (α_n).

2. Déterminer une expression de F_n sans signe somme.

3. Montrer que (F_n) converge simplement vers une fonction continue f.

4. Montrer que cette convergence est uniforme.

Programme officiel (PSI)

Suites et séries - B - Suites et séries de fonctions (p. 13)