■ Chapitre 10 ■
Espaces vectoriels normés de dimension finie

Notations.
■ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
■ E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, généralement de dimension finie.

I. Normes & Distances

I.1 Normes

Définition 1 (Norme).
L'application $N : E \to \mathbb{R}_+$ est une *norme* sur E si
- (i). **Séparabilité.** $\forall\, x \in E$, $N(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0_E$.
- (ii). **Homogénéité.** $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.
- (iii). **Inégalité triangulaire.** $\forall\, (x, y) \in E^2$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Le couple (E, N) est un *espace vectoriel normé*.

Exercice 1. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que les applications suivantes sont des normes.

1. Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.

Sur $\mathbb{R}^n$.

2. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

3. $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

4. $\|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

Sur $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$.

5. $\|f\|_1 = \int_I |f|$.

6. $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2 \, \mathrm{d}t}$.

7. $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$.

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

8. $N_1(A) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

9. $N_2(A) = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^t\!AA)}$.

10. $N_\infty(A) = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

11. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $f \in \mathscr{GL}(E)$. Montrer que l'application $N : x \mapsto \|f(x)\|$ est une norme sur E.

Théorème 1 (Norme euclidienne).
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. L'application $\|\cdot\| \,:\, E \to \mathbb{R}_+$, $u \mapsto \sqrt{\langle u, u \rangle}$ est une norme sur E. C'est la *norme euclidienne* issue du produit scalaire.
Si $u \in E$ est tel que $\|u\| = 1$, le vecteur u est *normé* ou *unitaire*.

Exercice 2. Donner des exemples de normes euclidiennes sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 1 (Inégalité triangulaire inverse).
Pour tout $(x, y) \in E^2$, $|\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$.

Exercice 3. Soient x, y deux vecteurs non nuls. Montrer que

$$\|x - y\| \geqslant \frac{1}{2} \max\{\|x\|, \|y\|\} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|.$$

I.2 Distances

Définition 2 (Distance).

Soit $(x, y) \in E^2$. La *distance* entre x et y est le réel $d(x, y) = \|x - y\|$.

Propriété 2.

Soit $(x, y, z) \in E^3$ et d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

(i). **Séparation.** $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

(ii). **Symétrie.** $d(x, y) = d(y, x)$.

(iii). **Inégalité triangulaire.** $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Définition 3 (Boule ouverte / fermée).

Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

(i). $\mathscr{B}(a, r) = \{x \in E \; ; \; d(a, x) < r\}$ est la *boule ouverte* de centre a et de rayon r.

(ii). $\overline{\mathscr{B}}(a, r) = \{x \in E \; ; \; d(a, x) \leqslant r\}$ est la *boule fermée* de centre a et de rayon r.

(iii). $\mathbb{S}(a, r) = \{x \in E \; ; \; d(a, x) = r\}$ est la *sphère* de centre a et de rayon r.

Exercice 4.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, représenter graphiquement les boules centrées en 0 et de rayon 1 associées aux normes 1, 2 et infinie définies précédemment. Discuter les inclusions entre ces boules.

2. Soient N_1 (resp. N_2) une norme sur E et $\mathscr{B}_1$ (resp. $\mathscr{B}_2$) sa boule unité. Montrer que, si $N_1 \leqslant N_2$, alors $\mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}_1$.

I.3 Parties Convexes & Bornées

Définition 4 (Partie convexe).

Soit $A \subset E$. La partie A est *convexe* si

$$\forall\ (x, y) \in A^2,\ \forall\ t \in [0, 1],\ tx + (1 - t)y \in A.$$

Exercice 5.

1. Déterminer les parties convexes de $\mathbb{R}$.

2. Représenter graphiquement une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ qui ne soit pas un pavé.

3. Représenter graphiquement une partie non convexe de $\mathbb{R}^2$.

4. Soient A, B deux vecteurs de E. On note $[AB] = \{tA + (1 - t)B,\ t \in [0, 1]\}$. Montrer que $[AB]$ est convexe.

5. On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des matrices stochastiques, i.e. l'ensemble des matrices $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients positifs et tels que pour tout i entier naturel non nul, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{i,j} = 1$. Montrer que $\mathscr{P}$ est convexe.

Propriété 3 (Convexité & Boules).

Toute boule est convexe.

Définition 5 (Partie bornée).

Soient $A \subset E$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et f une fonction d'un ensemble I à valeurs dans E.

(i). La partie A est un ensemble *borné* s'il existe une boule fermée contenant A.

(ii). La suite (u_n) est *bornée* si son support est borné, i.e. il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant K$.

(iii). La fonction f est *bornée* si $f(I)$ est une partie bornée de E.

Exercice 6.

1. Montrer que toute boule est une partie bornée.

2. L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie. Montrer que la fonction définie sur $[0,1]^3$ par $f(x,y,z) = (x - y + 2z, x^2 + y^2 + z^2)$ est bornée.

3. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est borné.

4. On considère l'espace vectoriel $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Soit (f_n) la suite de fonctions continues sur $[0,1]$ définies pour tout entier naturel n par $f_n : x \mapsto \sqrt{n}x^n$.

a) Montrer que (f_n) n'est pas bornée pour la norme infinie.

b) Montrer que (f_n) est bornée pour la norme 2.

I.4 Équivalence des normes

Théorème 2 (Équivalence des normes, H.P.).

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et N_1, N_2 deux normes sur E. Alors, il existe $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que

$$\forall\, x \in E,\ \alpha N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant \beta N_1(x).$$

Exercice 7.

1. Déterminer les valeurs de α et β lorsque $E = \mathbb{R}^p$ et les normes considérées sont

a) $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

b) $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

2. Montrer que, en dimension finie, la notion de partie bornée ne dépend pas de la norme choisie.

3. Montrer que l'équivalence des normes est fausse, en général, en dimension infinie.

II. Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Définition 6 (Convergence).

Soit (u_n) une suite d'éléments de E et $\ell \in E$. La suite (u_n) *converge* vers ℓ si $\|u_n - \ell\|$ converge vers 0. S'il n'existe pas d'éléments ℓ vérifiant cette propriété, la suite (u_n) *diverge*.

Exercice 8.

1. Montrer que si (u_n) possède une limite alors celle-ci est unique.

2. Montrer que (u_n) converge vers 0 si et seulement si $(\|u_n\|)$ converge vers 0.

3. Montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors $(\|u_n\|)$ converge vers $\|\ell\|$. Montrer que la réciproque est fausse.

Propriété 4 (Convergent & Borné).

Toute suite convergente est bornée.

Exercice 9. Montrer que la réciproque est fausse.

Propriété 5 (Convergence en dimension finie).

En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie.

Théorème 3 (Convergence composante par composante).

Soient (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$.

La suite (u_n) est convergente si et seulement si pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la suite $(u_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Le cas échéant, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{n\to+\infty} u_{n,i} \right) e_i$.

Exercice 10. Montrer que la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $M_n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & \frac{2}{n} & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \frac{\cos(n)}{\mathrm{e}^n} & \mathrm{e}^{1/n} & \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$ est convergente.

Propriété 6 (Sous-suites).

Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ. Alors, toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 11. Montrer que si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

III. Topologie

III.1 Intérieur

Définition 7 (Point intérieur).

Soient $A \subset E$ et $a \in A$.

(*i*). Le vecteur a est un *point intérieur* à A s'il existe une boule ouverte non vide centrée en a incluse dans A.

(*ii*). L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.

Exercice 12.

1. Déterminer l'ensemble des points intérieurs à l'intervalle $[0, 1[$.

2. Montrer que si a est un point intérieur à A et si (u_n) est une suite d'éléments de E qui converge vers a, alors à partir d'un certain rang, $u_n \in A$.

Définition 8 (Partie ouverte).

Soit $A \subset E$. La partie A est une *partie ouverte* si chacun de ses points est un point intérieur à A.

Exercice 13.

1. Montrer que A est un ouvert si et seulement si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $\mathscr{B}(a, r) \subset A$.

2. Montrer que E et $\emptyset$ sont des ouverts.

3. Montrer que A est un ouvert si et seulement si $\mathring{A} = A$.

4. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Ce résultat persiste-t-il pour les intersections quelconques ?

5. Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

Propriété 7 (Ouverts & Boules).

Toute boule ouverte est un ouvert.

Exercice 14. Montrer que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un ouvert.

III.2 Adhérence

Définition 9 (Point adhérent).
Soient $A \subset E$ et $\ell \in E$.

(i). Le vecteur ℓ est un *point adhérent* à A si toute boule ouverte non vide centrée en ℓ rencontre A.

(ii). L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.

Exercice 15.

1. Déterminer l'ensemble des points adhérents au segment $[0, 1[$.

2. Montrer que tout point de A est adhérent à A.

Propriété 8 (Caractérisation séquentielle).
Soient $A \subset E$ et $\ell \in E$. Le point ℓ est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers ℓ.

Exercice 16. Montrer que la matrice nulle est dans l'adhérence de l'ensemble des matrices inversibles.

Définition 10 (Partie fermée).
Soit $A \subset E$. La partie A est une *partie fermée* si tous les points adhérents à A sont dans A.

Exercice 17.

1. Montrer que E et $\emptyset$ sont des fermés.

2. Montrer que A est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

3. Déterminer $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$.

Propriété 9 (Caractérisation séquentielle).
Soit A une partie de E. La partie A est fermée si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de A convergeant (vers un vecteur de E), la limite de (u_n) appartient à A.

Exercice 18.

1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est fermé.

2. Les ensembles $\mathbb{U}$ et $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ sont-ils des fermés ?

3. Soit F est un espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que F est fermé.

Propriété 10 (Fermés & Boules).

(i). Toute boule fermée est un fermé.

(ii). Toute sphère est un fermé.

Exercice 19. Montrer que tout segment de $\mathbb{R}$ est un fermé.

III.3 Frontière

Propriété 11 (Ouverts & Fermés).
Soit $A \subset E$. La partie A est fermée si et seulement si ${}^cA$ est ouverte.

Exercice 20.

1. Montrer qu'une intersection quelconque de fermés est un fermé.

2. Montrer qu'une réunion finie de fermés est un fermé.

3. Montrer qu'une réunion quelconque de fermés n'est pas toujours un fermé.

Définition 11 (Frontière).

Soit $A \subset E$. La *frontière* de A, notée ∂A, est l'ensemble des points de E adhérents mais non intérieurs à A, i.e. $\partial A = \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A}$.

Exercice 21. Déterminer la frontière de $\mathscr{B}(a, r)$.

IV. Fonctions entre espaces vectoriels normés

Notation.

- f désigne une application d'une partie A d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|_E)$ dans un e.v.n. $(F, \|\cdot\|_F)$.

IV.1 Limite & Continuité

Définition 12 (Limite en un point).

Soit $a \in \overline{A}$ et $b \in F$. La fonction f a pour *limite* b en a si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0\ ;\ \forall\ x \in A,\ (\|x - a\|_E \leqslant \eta\ \Rightarrow\ \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon)\,.$$

Exercice 22. Montrer que les fonctions constantes ainsi que la fonction identité admettent des limites en tout point.

Propriété 12 (Unicité de la limite).

Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Définition 13 (Limite en l'infini).

On suppose que $E \subset \mathbb{R}$ et $b \in F$.

(i). Si $+\infty \in \overline{A}$, alors f admet b pour limite en $+\infty$ si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M > 0\ ;\ \forall\ x \in A,\ (x > M\ \Rightarrow\ \|f(x) - b\|_F < \varepsilon)\,.$$

(ii). Si $-\infty \in \overline{A}$, alors f admet b pour limite en $-\infty$ si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ M < 0\ ;\ \forall\ x \in A,\ (x < M\ \Rightarrow\ \|f(x) - b\|_F < \varepsilon)\,.$$

Propriété 13 (Caractérisation séquentielle).

Soit $a \in \overline{A}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i). La fonction f possède une limite en a.

(ii). Pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))$ admet une limite.

Le cas échéant, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n)$.

Exercice 23. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

Définition 14 (Continuité).

Lorsque $a \in A$ et f admet une limite en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. La fonction f est *continue* en a.

La fonction f est *continue* sur A si f est continue en tout point de A.

IV.2 Opérations sur les limites

Propriété 14 (Composante à composante).

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ une base de F. Notons $f = \sum_{i=1}^{r} f_i \varepsilon_i$.

(i). Soit $a \in \overline{A}$. La fonction f admet une limite en a si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, f_i admet une limite en a. Alors, $\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lim_{x \to a} f_i(x) \varepsilon_i$.

(ii). Soit $a \in A$. La fonction f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, f_i est continue en a.

(iii). La fonction f est continue sur A si et seulement si pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ la fonction f_i est continue sur A.

Propriété 15 (Opérations algébriques).

Soient f et g deux fonctions définies sur A à valeurs dans F et α une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $a \in \overline{A}$. On suppose que f, g et α admettent une limite en a. Alors,

(i). $f + g$ admet une limite en a et $\lim_a (f + g) = \lim_a f + \lim_a g$.

(ii). αf admet une limite en a et $\lim_a (\alpha f) = \lim_a \alpha \cdot \lim_a f$.

(iii). Si $\alpha(x) \neq 0$ sur une boule centrée en a, alors la fonction $\frac{f}{\alpha}$ admet une limite en a et $\lim_a \frac{f}{\alpha} = \frac{\lim_a f}{\lim_a \alpha}$.

Lorsque $a \in A$, ces propriétés sont étendues à la continuité.

Propriété 16 (Composition).

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, A une partie de E et B une partie de F telles que $f(A) \subset B$, g soit définies sur B et $g(B) \subset G$. Soit $a \in \overline{A}$ tel que f admette une limite b en a. Alors,

* $b \in \overline{B}$.
* Si g admet une limite c en b, alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_a g \circ f = c$.

Lorsque $a \in A$, ces propriétés sont étendues à la continuité.

Corollaire 4 (Fonctions polynomiales).

Toute application polynomiale sur $\mathbb{K}^p$, i.e. toute fonction $f = \sum_{i=1}^{r} f_i \varepsilon_i$ telle que pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, r]\!]$, $x \mapsto f_i(x_1, \ldots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \ldots, x_p)$ soit polynomiale, est continue.

Exercice 24. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x^2 + z^2 + xyz, 2x + 3yz)$ est continue.

IV.3 Fonctions lipschitziennes

Définition 15 (Fonctions lipschitziennes).

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. La fonction f est *k-lipschitzienne* si

$$\forall\, (x, y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k \|x - y\|_E .$$

Exercice 25.

1. Montrer que la fonction cos est une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la norme est une fonction 1-lipschitzienne.

3. Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes est un espace vectoriel stable par composition.

Propriété 17 (Continuité).
Toute fonction lipschitzienne est continue.

Exercice 26.

1. Montrer que la réciproque est fausse.

2. Montrer que la norme est une fonction continue.

3. Soit B une partie de E. Pour tout $x \in E$, on définit $d(x, B) = \inf\{d(x, y),\ y \in B\}$.

a) Montrer que $d(\cdot, B)$ est bien définie et continue.

b) Montrer que $d(x, B) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{B}$.

Théorème 5 (Applications linéaires).
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Toute application linéaire de E dans F est lipschitzienne (donc continue).

Exercice 27.

1. Donner des exemples d'applications linéaires.

2. Soient $(P, Q) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2$ et φ l'application définie pour tout $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = PMQ$. Montrer que φ est continue et en déduire $\overline{\mathscr{GL}_p(\mathbb{K})}$.

Corollaire 6 (Applications multilinéaires).
Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Toute fonction multilinéaire est continue.

Exercice 28.

1. a) Montrer que l'application déterminant est continue.

b) Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $z \in \mathbb{K}$ et (M_k) converge vers M, en déduire que $(\det(zI_n - M_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\det(zI_n - M)$ lorsque k tend vers $+\infty$.

2. Montrer que l'application produit scalaire est continue.

3. Montrer que le produit matriciel est une application continue. En déduire que si (A_n) est une suite de matrices inversibles convergeant vers une matrice A et si (A_n^{-1}) converge vers une matrice B, alors A est inversible.

IV.4 Fonctions à valeurs réelles

Définition 16 (Limites infinies).
Si $a \in \overline{A}$ et $F = \mathbb{R}$,

(i). f admet $+\infty$ pour limite en a si

$$\forall\, M > 0, \exists\, \eta > 0\ ;\ \forall\, x \in A, \left(\|x - a\|_E < \eta\ \Rightarrow\ f(x) > M\right).$$

(ii). f admet $-\infty$ pour limite en a si

$$-\forall\, M < 0, \exists\, \eta > 0\ ;\ \forall\, x \in A, \left(\|x - a\|_E < \eta\ \Rightarrow\ f(x) < M\right).$$

Propriété 18 (Ensembles de niveau).

Soit f une application continue de E dans $\mathbb{R}$. Alors,

(i). L'ensemble $\{x \in E\ ;\ f(x) > 0\}$ est une partie ouverte de E.

(ii). L'ensemble $\{x \in E\ ;\ f(x) \geqslant 0\}$ est une partie fermée de E.

(iii). L'ensemble $\{x \in E\ ;\ f(x) = 0\}$ est une partie fermée de E.

Exercice 29.

1. Montrer que le cercle unité est fermé.

2. Montrer que $\mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

Théorème 7 (Théorème des bornes atteintes, Admis).

Soit K une partie fermée, bornée non vide de E (e.v.n. de dimension finie) et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 30.

1. Soient n un entier naturel non nul et $\mathscr{O}_n = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ {}^tMM = I_n\right\}$.

a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Montrer que $R_\theta \in \mathscr{O}_2$.

b) Montrer que si $M = (a_{i,j}) \in \mathscr{O}_n$, alors $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.

c) En déduire que $\mathscr{O}_n$ est un ensemble fermé borné.

2. On suppose que E est non trivial. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $N(u) = \sup\limits_{x\in E\ ;\ \|x\|=1} \|u(x)\|$. Montrer que $N(u)$ est bien défini et qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $N(u) = \|u(x_0)\|$.

Normes subordonnées

Exercice 31. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $|||A||| = \sup\left\{\frac{\|Av\|}{\|v\|},\ v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}\right\}$ et $\mathbb{S} = \{v \in \mathbb{K}^n\ ;\ \|v\| = 1\}$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer, sous réserve d'existence de la borne supérieure, que $|||A||| = \sup\limits_{v\in\mathbb{S}} \|Av\|$.

2. Montrer qu'il existe $v_0 \in \mathbb{K}^n$ tel que $|||A||| = \|Av_0\|$.

3. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Montrer que pour tous A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $|||AB||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||$.

5. Pour chacune des normes suivantes, montrer les correspondances :

a) $\|v\|_1 = \sum\limits_{i=1}^n |v_i|$ et $|||A|||_1 = \max\limits_{j\in[\![1,n]\!]} \sum\limits_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

b) $\|v\|_\infty = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |v_i|$ et $|||A|||_\infty = \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|$.

Programme officiel (PSI)

Espaces vectoriels normés de dimension finie (p. 11)