■ Chapitre 12 ■
Intégrales à paramètre

Notations.
■ $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
■ I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.

Exercice 1.

1. Soit $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}$. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_n \int_{\mathbb{R}} f_n$ puis $\int_{\mathbb{R}} \left(\lim\limits_n f_n\right)$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $f(x) = n^2 x$ si $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ et $f(x) = n^2\left(\frac{2}{n} - x\right)$ si $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ et $f(x) = 0$ sinon. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$. Déterminer $\lim\limits_n \left(\int_{[0,1]} f_n\right)$ puis $\int_{[0,1]} \left(\lim\limits_n f_n\right)$.

I. Suites & Séries de fonctions

Théorème 1 (Théorème de convergence dominée, Admis).

Soient (f_n) et f des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telles que

(i). **Régularité.** $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^-(I, \mathbb{K})$.

(ii). **Convergence.** (f_n) converge simplement vers f.

(iii). **Régularité de la limite.** f est continue par morceaux.

(iv). **Domination.** Il existe une fonction φ définie sur I telle que
- φ est à valeurs positives.
- $\varphi \in \mathscr{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant \varphi$.

Alors, pour tout entier naturel n, f_n est intégrable, f est intégrable et

$$\int_I \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n\right).$$

Exercice 2.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}t}{1+nt^n} = 1$.

2. Intégrale de Gauss. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}[}(x)$.

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}_+} f_n \to \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) Déterminer $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On rappelle le résultat sur les intégrales de Wallis : $\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}(t)\,dt \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Théorème 2 (Théorème d'intégration terme à terme, Admis).

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que

(i). **Régularité & Intégrabilité.** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f_n \in \mathscr{L}^1(I, \mathbb{K})$.

(ii). **Convergence.** $\sum f_n$ converge simplement sur I.

(iii). **Régularité de la limite.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathscr{C}^-(I, \mathbb{K})$.

(iv). **Domination.** $\sum \displaystyle\int_I |f_n|$ converge.

Alors, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

Exercice 3. Montrer que

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{n^2} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$. Déterminer une approximation à 10^{-3} près de cette intégrale.

3. On souhaite montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-\sqrt{n}t} \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

a) Montrer que le théorème précédent ne s'applique pas.

b) Conclure en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles.

II. Intégrales dépendant d'un paramètre

Théorème 3 (Continuité sous le signe intégral).

Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ telle que

(i). **Régularité en le paramètre.** $\forall\, t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.

(ii). **Régularité.** $\forall\, x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii). **Domination.** Il existe $\varphi \in \mathscr{L}^1(J, \mathbb{R}_+)$ tel que $\forall\, (x,t) \in I \times J,\ |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, $x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\, \mathrm{d}t$ est continue sur I.

Exercice 4.

1. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x + t^3}$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.

On pourra utiliser le changement de variables $\varphi : u \mapsto u/\sqrt[3]{x}$.

2. Fonction Gamma. Montrer que la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\sinh(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de F.

b) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Théorème 4 (Dérivation sous le signe intégral).

Soit $f : I \times J \to \mathbb{K}$ telle que

(i). **Régularité en le paramètre.** $\forall\, t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

(ii). **Intégrabilité.** $\forall\, x \in I,\ t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.

(iii). **Régularité de la dérivée.** $\forall\, x \in I,\ t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iv). **Domination de la dérivée.** Il existe $\varphi \in \mathscr{L}^1(J,\mathbb{R}_+)$ t.q. $\forall\,(x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors, $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall\, x \in I,\ F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sinh t}{t}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$.

2. Soit $F_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^{n+1}}$. Montrer que $F_n'(x) = -2(n+1)xF_{n+1}(x)$. En déduire que, pour tout réel non nul, $F_n(x) = \frac{\pi(2n)!}{(2x)^{2n+1}(n!)^2}$.

Corollaire 5.

Soient $f : I \times J \to \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que

(i). **Régularité en le paramètre.** $\forall\, t \in J,\ x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

(ii). **Régularité des dérivées.** $\forall\, j \in [\![0,k]\!],\ \forall\, x \in I,\ t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.

(iii). **Domination des dérivées.**

$$\forall\, j \in [\![0,k]\!],\ \exists\, \varphi_j \in \mathscr{L}^1(J,\mathbb{R}_+)\ ;\ \forall\,(x,t) \in I \times J,\ \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leqslant \varphi_j(t).$$

Alors, $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et

$$\forall\, j \in [\![0,k]\!],\ \forall\, x \in I,\ g^{(j)}(x) = \int_J \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 6.

1. Calculer les dérivées successives de la fonction Γ.

2. Fonction de Stieltjes. Calculer les dérivées successives sur $\mathbb{R}_+$ de $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$.

Transformée de Laplace

Exercice 7. Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on note, lorsqu'elle converge, $\mathscr{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $\mathscr{L}(f)$ est la transformée de Laplace de f.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer leur transformée de Laplace en précisant son domaine de définition :

a) $t \mapsto 1$. **b)** $t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. **c)** $t \mapsto t^n$.

2. On suppose que f est bornée. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Théorème de la valeur finale. On suppose qu'il existe un réel ℓ non nul tel que $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \ell$. Déterminer un équivalent de $\mathscr{L}(f)$ en 0.

On suppose qu'il existe $p_0 > 0$ tel que, pour pour tout $p > p_0$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

4. Montrer que $\mathscr{L}(f)$ est définie et continue sur $]p_0, +\infty[$.

5. Théorème de la valeur initiale. On note $\ell = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$. Déterminer un équivalent de $\mathscr{L}(f)$ en $+\infty$.

Programme officiel (PSI)

Intégration - e, f (p. 18, 19)

Mathématiciens

Wallis John (23 nov. 1616 à Ashford-28 oct. 1703 à Oxford).
Laplace Pierre-Simon (23 mar. 1749 à Beaumon-en-Auge-5 mar. 1827 à Paris).
Gauss Johann Carl Friedrich (30 avr. 1777 à Brunswick-23 fév. 1855 à Göttingen).
Stieltjes Thomas Jan (29 déc. 1856 à Zwolle-31 déc. 1894 à Toulouse).