■ Chapitre 14 ■
Endomorphismes d'un espace euclidien

Notation.
■ E désigne un espace vectoriel euclidien (i.e. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire) de dimension n.

I. Endomorphismes symétriques

I.1 Définition

Définition 1 (Endomorphisme symétrique).

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'endomorphisme u est *symétrique* si

$$\forall\ (x, y) \in E^2,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle.$$

L'ensemble des endomorphismes symétriques est noté $\mathscr{S}(E)$.

Exercice 1. Montrer que les homothéties, les projections orthogonales et les symétries orthogonales sont des endomorphismes orthogonaux.

Théorème 1 (Structure).

$\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Propriété 1 (Caractérisation matricielle).

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. L'endomorphisme u est symétrique si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.
L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n sera noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2.

1. Exprimer $\dim \mathscr{S}(E)$ en fonction de $n = \dim(E)$..

2. Soient u et v deux endomorphismes symétriques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $u \circ v$ soit symétrique.

I.2 Réduction

Exercice 3.

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

2. Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Montrer que $F^\perp$ est stable par u.

Théorème 2 (Théorème spectral).

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

Théorème 3 (Théorème spectral matriciel).

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors, il existe une matrice diagonale réelle D et une matrice P telles que ${}^tPP = I_n$ et $M = PD{}^tP$.

Exercice 4.

1. Appliquer le théorème précédent à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Que dire de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. (✍) Soit A une matrice symétrique réelle. On suppose qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

II. Isométries vectorielles

II.1 Définition

Définition 2 (Endomoprhisme orthogonal).

Un endomorphisme f est *orthogonal* s'il préserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall\, x,\, y \in E,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle.$$

On note $\mathscr{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux. Ses éléments sont également appelées *isométries vectorielles*.

Exercice 6. Montrer que l'identité, les symétries orthogonales, les rotations en dimension 2 sont des endomorphismes orthogonaux.

Propriété 2 (Caractérisation en termes de norme).

Les endomorphismes orthogonaux sont les endomorphismes qui préservent la norme.

$$\mathscr{O}(E) = \{f \in \mathscr{L}(E)\ ;\ \forall\, x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|\}.$$

Exercice 7.

1. Montrer qu'il existe des fonctions non linéaires telles que $\forall\, x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

2. Quelles sont les valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle ?

Propriété 3 (Structure).

Soit $(f, g) \in \mathscr{O}(E)^2$. Alors,

(i). $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{O}(E)$.

(ii). $f \in \mathscr{GL}(E)$.

(iii). $f \circ g^{-1} \in \mathscr{O}(E)$.

Propriété 4.

Soit $f \in \mathscr{O}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors, $F^\perp$ est stable par f.

Propriété 5 (Caractérisation en termes de b.o.n.)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

(i). Si f est un automorphisme orthogonal, alors l'image de toute base orthonormée par f est une base orthonormée.

(ii). S'il existe une base orthonormée dont l'image par f est une base orthonormée, alors f est un automorphisme orthogonal.

Propriété 6.

Soit $f \in \mathscr{O}(E)$ et M sa matrice dans une base orthonormée. Alors, $M^tM = {}^tMM = I_n$ et $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

Définition 3 (Groupe spécial orthogonal).

Le *groupe spécial orthogonal* est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de déterminant 1, i.e.

$$SO(E) = \{f \in \mathscr{O}(E)\ ;\ \det f = 1\}.$$

Les éléments de $SO(E)$ sont les *rotations vectorielles*.

Propriété 7.

$SO(E)$ est une partie non vide de $\mathscr{O}(E)$ stable par composition et passage à l'inverse.

Définition 4 (Réflexion).

Une *réflexion* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Exercice 8. Soit s une réflexion. Montrer que $\det(s) = -1$.

II.2 Matrices orthogonales

Définition 5 ($\mathscr{O}_n$).

L'ensemble des matrices *orthogonales* est l'ensemble

$$\mathscr{O}_n = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ {}^tMM = I_n\}.$$

Exercice 9. Montrer que $\mathscr{O}_n$ est une partie fermée bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriétés 8.

(i). $\mathscr{O}_n$ est une partie non vide de $\mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$ stable par multiplication et passage à l'inverse.

(ii). Si $M \in \mathscr{O}_n$ et f est l'endomorphisme canoniquement associé à M, alors $f \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^n)$.

(iii). Si $M \in \mathscr{O}_n$, alors $\det(M) \in \{-1, +1\}$.

Propriété 9.

Soit $M = [C_1, \dots, C_n]$. Alors, $(C_1, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 4 (Changement de base orthonormée).

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormées de E et $Q = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$. Alors, Q est orthogonale, soit ${}^tQ = Q^{-1}$. De plus, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = {}^tQ\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)Q$.

Définition 6 (Groupe spécial orthogonal).

Le *groupe spécial orthogonal* est l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1, i.e.

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathscr{O}_n\ ;\ \det M = 1\}.$$

Les éléments de SO_n sont les matrices de *rotations vectorielles*.

Propriété 10.

SO_n est une partie non vide de $\mathscr{O}_n$ stable par multiplication et passage à l'inverse.

III. Dimensions 2 et 3

III.1 Orientation

Dans cette partie, on se limite aux cas où E est de dimension 2 ou 3.

Définition 7 (Orientation).

(i). La relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble des bases de E définie par $\mathscr{B}_1 \mathscr{R} \mathscr{B}_2$ si et seulement si $\det_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2) > 0$ est une relation d'équivalence.

(ii). E est *orienté* si on choisit une des deux classes d'équivalences. Les bases de cette classe sont orientées dans le sens *positif* (ou *direct*), les autres le sont dans le sens *négatif* (ou *indirect*).

(iii). Un espace vectoriel euclidien *orienté* est un espace vectoriel euclidien muni d'une orientation.

Exercice 10. Illustrer ces définitions.

Propriété 11 (Caractérisation).

Les endomorphismes de $SO(E)$ transforment les bases orthonormées directes en bases orthonormées directes.

Théorème 5 (Hyperplan & Orientation).

Soient E un espace vectoriel orienté et H un hyperplan de E. On note $D = H^{\perp} = \text{Vect}\{a\}$, où a est un vecteur unitaire. Il existe une unique orientation de H telle que pour toute base orthonormée directe $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de H, la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, a)$ soit directe. L'hyperplan H est orienté par le vecteur normal a.

Exercice 11. Illustrer ce théorème.

Définition 8 (Produit mixte).

Soient E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n, $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Le réel $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est indépendant du choix de la base orthonormée directe $\mathscr{B}$. C'est le *produit mixte* de $(u_1, \dots, u_n)$, noté $[u_1, \dots, u_n]$.

Exercice 12.

1. Montrer que $[u_1, \dots, u_n] \neq 0$ si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E.

2. Soit (u_1, u_2) une base de $\mathbb{R}^2$. Interpréter $[u_1, u_2]$ en terme d'aire.

Définition 9 (Produit vectoriel).

On suppose que $\dim E = 3$. Soient $(u, v) \in E^2$. Il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que pour tout $w \in E$, $[u, v, w] = \langle a, w \rangle$. Le vecteur a, noté $u \wedge v$, est le *produit vectoriel* de u et v.

Propriété 12.

Soient (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale directe et u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. On note (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) les coordonnées de u et de v dans cette base. Alors, les coordonnées de $u \wedge v$ sont

$$\begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13. Montrer que $a \wedge (b \wedge c) = \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c$.

III.2 Automorphismes orthogonaux du plan

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et f un automorphisme orthogonal de E. On note $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée de E.

Théorème 6 (Décomposition).

Les automorphismes orthogonaux du plan sont soit des réflexions, soit des rotations (composées de deux réflexions).

Théorème 7 (Rotations).

Soit r une rotation. Sa matrice dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$, où $a^2 + c^2 = 1$. Ainsi, si r_1 et r_2 sont des rotations, r_1 et r_2 commutent.

Propriété 13 (Angle).

Soit $f \in SO(E)$. Il existe un réel θ défini modulo 2π tel que quelle que soit la base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Le réel θ est une *mesure de l'angle* de la rotation vectorielle f. Dans le plan complexe, la transformation f s'écrit $z \mapsto \mathrm{e}^{i\theta} z$.

Propriété 14 (Composition).

Soient f et g deux rotations d'angles de mesures respectives θ et φ. Alors, f et g commutent et $f \circ g$ est la rotation d'angle $\theta + \varphi$.

Propriété 15 (Détermination pratique).

Pour tout vecteur u non nul de E, $\cos\theta = \frac{\langle u, f(u)\rangle}{\|u\|^2}$ et $\sin\theta = \frac{[u, f(u)]}{\|u\|^2}$.

III.3 Automorphismes orthogonaux de l'espace

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, f un automorphisme orthogonal de E et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée de E.

Théorème 8.

Soit f une rotation. Il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (u, v, w)$ de E telle que $M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Ainsi, f est une *rotation* d'angle θ autour du vecteur u.
Si $f \neq \mathrm{Id}_E$, alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\{u\}$, est appelé *axe* de la rotation.
La restriction de f au plan $\mathrm{Vect}\{u\}^{\perp}$ orienté par u est la rotation d'angle θ.

Exercice 14.

1. Montrer que, si f est une rotation en dimension 3, alors ses valeurs propres sont 1, $\mathrm{e}^{i\theta}$, $\mathrm{e}^{-i\theta}$.

2. Soit f la rotation dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les caractéristiques de cette rotation.

3. En considérant la rotation d'axe orienté par $\vec{i}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et celle d'axe orienté par $\vec{j}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que $SO(E)$ n'est pas commutatif.

Propriété 16 (Détermination pratique).

Soit r une rotation d'angle θ et d'axe $\mathrm{Vect}\{u\}$, où $\|u\| = 1$.

(i). Si $x \perp u$, alors $r(x) = \cos\theta x + \sin\theta \cdot u \wedge x$.

(ii). Si $x \perp u$ et $\|x\| = 1$, alors $\cos\theta = \langle x, r(x)\rangle$ et $\sin\theta = [x, r(x), u]$.

Détermination matricielle de l'axe et de l'angle d'une rotation

Exercice 15. Soit f une rotation vectorielle de matrice M dans une base orthonormée.

1. On suppose que ${}^tM = M$.

a) Lorsque $M = I_3$, identifier f.

b) Lorsque $M \neq I_3$, décrire géométriquement l'endormorphisme f.

2. On suppose que ${}^tM \neq M$ et on note g l'endomorphisme associé à $M - {}^tM$.

a) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $g : x \mapsto u \wedge x$.

b) En déduire que f est la rotation d'axe u et d'angle déterminé par $\cos\theta = \frac{\mathrm{Tr}(M)-1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\|u\|}{2}$.

3. Applications.

a) Déterminer les caractéristiques de la composée entre les rotations d'axes dirigés par $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ et d'angles $\frac{\pi}{2}$.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de l'endomorphisme dont la matrice dans une base orthonormée est $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et d'axe dirigé par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Programme officiel (PSI)

Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens - B - Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien (p. 10, 11)