

■ Chapitre 17 ■

Fonctions vectorielles, Arcs paramétrés

Notations.

- I désigne un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.
- L'espace vectoriel \mathbb{R}^n est muni de sa structure euclidienne usuelle.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire et $\|\cdot\|_2$ la norme associée.
- f désigne une fonction de I vers \mathbb{R}^n .

I. Régularité

I.1 Dérivabilité

Définition 1 (Dérivabilité).

Soit $x_0 \in I$. La fonction f est *dérivable* au point x_0 si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite :

- * son taux d'accroissement en x_0 admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 , i.e. il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{x \rightarrow x_0, x \neq x_0} \frac{1}{x - x_0} (f(x) - f(x_0)) = \ell.$$

- * la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 , i.e. il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $f(x) = a + (x - x_0)b + o(x - x_0)$.

La limite du taux d'accroissement est notée $f'(x_0)$. Alors, $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.

Propriété 1 (Applications coordonnées).

Soit $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $x_0 \in I$. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_i est dérivable en x_0 .

Exercice 1. Déterminer la dérivée des fonctions

1. $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$

2. $g : t \mapsto (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))).$

Définition 2 (Dérivabilité sur un intervalle).

La fonction f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I .

I.2 Dérivabilité & Opérations

Théorème 1 (Structure d'espace vectoriel).

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda f + g$ est dérivable en x_0 et

$$(\lambda f + g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + g'(x_0).$$

Théorème 2 (Applications linéaires).

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une application linéaire. Si f est dérivable en x_0 , alors $u \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(u \circ f)'(x_0) = u \circ f'(x_0).$$

Exercice 2. Soit ω un vecteur de \mathbb{R}^3 et $f : t \mapsto (1, t^2, t^3)$, où \mathbb{R}^3 est orienté par la base canonique. Déterminer la dérivée de la fonction $g : t \mapsto \omega \wedge f(t)$.

Théorème 3 (Applications bilinéaires).

Soit ψ une application bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Si f et g sont dérivables en x_0 , alors $\psi(f, g)$ est dérivable en x_0 et

$$\psi(f, g)'(x_0) = \psi(f', g)(x_0) + \psi(f, g')(x_0).$$

Exercice 3.

1. Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans \mathbb{R}^3 orienté par la base canonique. Déterminer la dérivée de la fonction $h : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$.

2. Soient M et N deux fonctions continues et dérivables sur \mathbb{R} , à dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la dérivée de $h : t \mapsto M(t) \cdot N(t)$.

Corollaire 4.

Soient f et g deux fonctions dérivables de I dans \mathbb{R}^2 . Les fonctions $\langle f, g \rangle$ et $\det(f, g)$ sont dérivables et satisfont, pour tout réel $t \in I$,

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle' &= \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle, \\ \|f\|_2'(t) &= \frac{\langle f(t), f'(t) \rangle}{\|f(t)\|_2} \text{ ssi } f(t) \neq (0, 0), \\ \det(f, g)' &= \det(f', g) + \det(f, g'). \end{aligned}$$

Exercice 4. Soient f_1 et f_2 deux solutions de l'équation différentielle $y'' = ay' + by$. En utilisant la bilinéarité du déterminant, déterminer une équation différentielle satisfaite par $W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$.

I.3 Classe \mathcal{C}^k **Définition 3 (Fonctions de classe \mathcal{C}^k).**

Soit $k \in \mathbb{N}$. Sous réserve d'existence, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f est définie par

$$f^{(0)} = f, f^{(k+1)} = \left(f^{(k)} \right)'.$$

La fonction f est de classe \mathcal{C}^k si $f^{(k)}$ existe et est continue. Elle est de classe \mathcal{C}^∞ si toutes ses dérivées existent.

Propriétés 2.

Soient f, g deux fonctions dérivables k fois, λ un réel, u une application linéaire et ψ une application bilinéaire. Alors, $\lambda f + g$, $u \circ f$ et $\psi(f, g)$ sont de classe \mathcal{C}^k et

$$\begin{array}{l} (i). (\lambda f + g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + g^{(k)}. \\ (ii). (u \circ f)^{(k)} = u \circ f^{(k)}. \end{array} \quad \left| \quad (iii). \psi(f, g)^{(k)} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \psi(f^{(k-j)}, g^{(j)}). \right.$$

II. Arc paramétré**II.1 Définition****Définition 4 (Arc paramétré, Support).**

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^k de I dans \mathbb{R}^2 . Le couple (I, f) est un *arc paramétré*, ou *courbe paramétrée*, de classe \mathcal{C}^k .

L'ensemble $f(I) = \{f(t), t \in I\}$ est le *support* de la courbe (I, f) .

Exercice 5.

1. Décrire le cercle trigonométrique à l'aide d'un arc paramétré.
2. Que dire du mouvement d'une particule dont la trajectoire f satisfait $\langle f', f'' \rangle = 0$?
3. Comment caractériser un mouvement à accélération centrale à l'aide des vecteurs f et f'' ?

II.2 Tangentes

Notation.

Dans toute la suite, $\Gamma = (I, f)$ désigne un arc paramétré de classe \mathcal{C}^2 . Pour tout $t \in I$, le point du plan de coordonnées $f(t)$ sera noté M_t . Le réel t_0 désigne un élément de I .

Définition 5 (Point régulier / singulier).

Le point M_{t_0} est dit

- (i). *régulier* si $f'(t_0) \neq (0, 0)$,
- (ii). *stationnaire* ou *singulier* si $f'(t_0) = (0, 0)$.

Exercice 6. Déterminer les points réguliers de

1. Cercle.

$$f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

2. Cycloïde.

$$g : t \mapsto (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))).$$

$$\mathbf{3.} \quad h : t \mapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}, 2t + t^2\right).$$

$$\mathbf{4.} \quad u : t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2}\right).$$

Définition 6 (Tangente).

L'arc Γ admet une *tangente* au point M_{t_0} s'il existe une fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la fonction $t \mapsto \left(\frac{1}{u(t)} \overrightarrow{M_t M_{t_0}}\right)$ admette une limite non nulle \vec{v} en t_0 . La droite passant par M_{t_0} et dirigée par ce vecteur \vec{v} est la *tangente* en M_{t_0} à Γ .

Proposition 3 (Tangente en un point régulier).

Si M_{t_0} est un point régulier, l'arc Γ admet une tangente au point M_{t_0} dirigée par le vecteur de coordonnées $f'(t_0)$.

Exercice 7. Soit $v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Déterminer, en tout point, un vecteur directeur de la tangente pour les courbes :

$$\mathbf{1.} \quad w : t \mapsto (t, v(t)).$$

$$\mathbf{2.} \quad f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t)).$$

3. Lemniscate de Bernoulli.

$$v : t \mapsto \left(\frac{t}{t^4+1}, \frac{t^3}{t^4+1}\right).$$

Théorème 5.



S'il existe un plus petit entier $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$ tel que $f^{(p)}(t_0) \neq 0$. La droite passant par le point M_{t_0} de coordonnées $f(t_0)$ et de vecteur directeur $f^{(p)}(t_0)$ est la *tangente* à Γ en M_{t_0} .

Exercice 8. Déterminer, en tout point singulier, un vecteur directeur de la tangente de :

$$\mathbf{1.} \quad g : t \mapsto (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t))).$$

$$\mathbf{2.} \quad h : t \mapsto \left(2t - \frac{1}{t^2}, 2t + t^2\right).$$

$$\mathbf{3.} \quad u : t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2}\right).$$

Notation.

On suppose dans la suite que $k \geq 2$.

Définition 7 (Repère local).



On suppose qu'il existe deux entiers minimaux $0 < p < q \leq k$ tels que $f^{(p)}(t_0)$ et $f^{(q)}(t_0)$ soient non colinéaires. Alors, $(M(t_0), f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ est le *repère local*.

- (i). Si p est impair et q est pair, le point $M(t_0)$ est un point *ordinaire*.
- (ii). Si p est impair et q est impair, le point $M(t_0)$ est un point d'*inflexion*.
- (iii). Si p est pair et q est impair, le point $M(t_0)$ est un point de *rebroussement de première espèce*.

(iv). Si p est pair et q est pair, le point $M(t_0)$ est un point de *rebroussement de seconde espèce*.

Exercice 9. Tracer l'allure, au voisinage des points singuliers, des arcs :

1. $t \mapsto \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2} \right)$ sur \mathbb{R}_+^*

2. $t \mapsto \left(t^2 + t^3, \frac{t^3}{1+t} \right)$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

II.3 Branches infinies

Notations.

- t_0 désigne une des bornes de l'intervalle I , ou les quantités $+\infty$ et $-\infty$.
- On note $f : t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$.

Définition 8 (Branche infinie, Direction asymptotique).

(i). L'arc Γ possède une *branche infinie* en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty$.

(ii). L'arc Γ admet une *direction asymptotique* de pente $m \in \mathbb{R}$ en t_0 si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|f(t)\| = +\infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f_2(t)}{f_1(t)} = m.$$

Définition 9 (Asymptote, Branche parabolique).

Soit Γ un arc paramétré de direction asymptotique m au point t_0 .

(i). Si $f_2 - mf_1$ a une limite finie p en t_0 , la droite d'équation $y = mx + p$ est dite *asymptote* à l'arc paramétré en t_0 .

(ii). Si $f_2 - mf_1$ a une limite infinie en t_0 , l'arc paramétré possède une *branche parabolique* de pente m en t_0 .

II.4 Tracé d'un arc paramétré

Notation.

- $f : t \mapsto (x(t), y(t))$ désigne un arc paramétré.
- (O, \vec{i}, \vec{j}) désigne un repère orthonormé direct du plan euclidien orienté.

1. Recherche de l'intervalle de définition \mathcal{D} de l'arc paramétré.

2. Réduction de l'intervalle d'étude en utilisant les symétries.

Généralement, on teste les changements de paramétrage

- * $u = -t$, réduction à $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}_+$,
- * $u = 2t_0 - t$, réduction à $\mathcal{D} \cap [t_0, +\infty[$,
- * $u = \frac{1}{t}$, réduction à $\mathcal{D} \cap]0, 1]$.

Propriété	Symétrie
$x(u) = x(t) \quad y(u) = y(t)$	identité
$x(u) = x(t) + a \quad y(u) = y(t) + b$	translation $a \vec{i} + b \vec{j}$
$x(u) = -x(t) \quad y(u) = y(t)$	axe (O, \vec{j})
$x(u) = x(t) \quad y(u) = -y(t)$	axe (O, \vec{i})
$x(u) = -x(t) \quad y(u) = -y(t)$	centre O
$x(u) = y(t) \quad y(u) = x(t)$	axe première bissectrice

3. Régularité & Variations : étude des variations de x et y , tracé du tableau des variations (incluant les tangentes remarquables).
4. Étude des points stationnaires (Utilisation de la formule de Taylor-Young).
5. Étude des branches infinies : $\lim_{t_0} \|f\| = +\infty$ (Utilisation de développements asymptotiques).

$\lim_{t_0} x(t) $	$\lim_{t_0} y(t) $	Comportement
$+\infty$	y_0	asymptote $y = y_0$
x_0	$+\infty$	asymptote $x = x_0$
$\lim_{t_0} \frac{ y }{ x } = +\infty$		branche parabolique, direction (Oy)
$\lim_{t_0} \frac{ y }{ x } = 0$		branche parabolique, direction (Ox) .
$\lim_{t_0} \frac{y}{x} = a \in \mathbb{R}^*$		
$\lim_{t_0} y - ax = \infty$		branche parabolique, direction $y = ax$
$\lim_{t_0} y - ax = b$		asymptote $y = ax + b$

Si une des limites précédentes n'existe pas, on ne peut en général rien conclure. Position par rapport aux asymptotes.

6. Recherche éventuelle des points doubles.

Recherche des solutions du système d'équations $x(t) = x(u)$, $y(t) = y(u)$, $t \neq u$.

7. Tracé (mise en valeur des tangentes et points remarquables, on pourra préciser le sens des t croissants).

Exercice 10. Étudier les courbes paramétrées :

1. $f(t) = \left(t^2 + t^3, \frac{t^3}{1+t}\right)$.
2. $g(t) = (\cos(3t), \sin(2t))$.

III. Propriétés métriques

Notation.

■ Γ désigne un arc paramétré de classe \mathcal{C}^k dont tous les points sont supposés réguliers, i.e. $f'(t_0) \neq (0, 0)$.

Définition 10 (Longueur d'arc).

Soient $t_1, t_2 \in I$ tels que $t_1 \leq t_2$. Le réel $\int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\|_2 dt$ est la *longueur d'arc* (M_{t_1}, M_{t_2}) .

Exercice 11.

1. Calculer la longueur du segment de droite $t \mapsto (t, at + b)$ compris entre les paramètres 0 et 1.
2. Calculer la longueur du cercle unité.
3. Déterminer la distance parcourue par la valve du pneu d'un vélo lorsque celui-ci parcourt un tour.



Programme officiel (PSI)

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés (p. 16)