Comment rédiger des preuves

■ ■ ■

Ces notes sont librement inspirées de l'article d'E. Cheng *How to write proofs : a quick guide* disponible à l'adresse http://eugeniacheng.com/math/non-specialists/

Écrire une preuve, ce n'est pas seulement s'asseoir devant une feuille de papier avec un stylo. Écrire une preuve, c'est plutôt comme écrire un poème dans une langue étrangère. Tout d'abord, il faut en apprendre la langue. Ensuite, il faut la maîtriser suffisamment pour pouvoir écrire de la poésie.

Cependant, même quand, avec l'habitude, l'écriture devient plus fluide, écrire une preuve nécessite toujours de planifier, de faire des efforts... et un brin d'inspiration. Les grands artistes réalisent des ébauches avant de commencer leur œuvre, les grands architectes réalisent des plans,... et les mathématiciens pensent également leurs preuves avant de les coucher sur le papier.

I. La forme d'une preuve

Comme une histoire, une preuve a un commencement, un milieu et une fin.

- **Le prologue.** Au commencement sont les hypothèses : les assertions que l'on suppose vérifiées, les définitions des objets qui seront les personnages du récit.
- **Le récit.** Au milieu, tous les arguments s'enchaînent logiquement.
- **L'épilogue.** À la fin, un résumé précis et concis de ce qui vient d'être prouvé.

Lors de la résolution d'un exercice, le commencement et la conclusion sont donnés ; le travail qui reste à effectuer : remplir le milieu ! La difficulté consiste alors à construire un récit structuré qui conduit à la conclusion.
Ce récit doit être envisagé comme un gué, ou un pont, construit pour rejoindre deux rives (les hypothèses et la conclusion). Si les piles du pont sont trop espacées, le danger est grand de voir la travée s'affaisser dans l'eau. Alors, la preuve peut être juste, mais peut être pas...

Enfin, une preuve est pensée à l'envers de ce qu'elle est rédigée. Ainsi, pour construire un pont, on commence par positionner, sur chacune des rives, les culées qui supporteront le poids de la preuve. On prévoit ensuite la position des piles, c'est-à-dire des principales étapes du raisonnement et enfin, on relie le tout avec le tablier.

II. Les styles de preuves

Soient p et q deux prédicats et x, y deux éléments. La plupart des questions auxquelles nous avons à répondre sont d'une des formes suivantes :

1. Montrer que $x = y$.
   Peut se rencontrer dans tout calcul.
2. Montrer que $p(x) \Rightarrow q(y)$.
   Pourra se montrer directement, ou par contraposée.
3. Monter que $p(x) \Leftrightarrow q(y)$.
   Se démontrera généralement par double implication.
4. Montrer qu'il existe x tel que $p(x)$ soit vraie.
   Tous les moyens (scientifiquement corrects) sont bons pour trouver (exhiber ?) un x !
5. Montrer que pour tout x, $p(x)$ est vraie.
   Devra débuter par « Soit x. » ou utiliser une récurrence.
6. Déterminer l'ensemble des x tels que $p(x)$ soit vraie.
   L'Analyse permet de trouver les candidats, la Synthèse de les valider.

II.1 Portraits-robots de preuves

Regardons maintenant à quoi doit ressembler une preuve à travers quelques exemples. Nous détaillons ainsi quelques styles de réponses à apporter aux questions vues dans la liste ci-dessus, ainsi que différents modes de raisonnement. Nous devons toujours nous rappeler que la preuve doit comporter un début, un milieu et une fin. Nous n'illustrerons pas ici le contre-exemple, qui permet de montrer qu'une assertion est fausse de manière très élégante et efficace !

D'aucuns trouveront les preuves ci-dessous trop détaillées. Le degré de précision des justifications dépend essentiellement du contexte de la preuve (niveau global de difficulté, lecteurs envisagés,...).

Exercice 1. (Du calcul) Pour tout n entier naturel non nul, montrer que $\sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} k &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=n+1}^{2n} k, \text{ d'après l'associativité de la somme}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{\ell=1}^{n} (2n-\ell+1), \text{ en effectuant un changement de variable}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n} (2n+1), \text{ en utilisant la commutativité de la somme}\\
&= n(2n+1).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^\star, \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2}$$

□

On notera qu'il n'est pas nécessaire de faire apparaître les symboles $\Leftrightarrow$ ou $\Rightarrow$ à chacune des lignes. Ces grigris sont trop souvent gribouillés pour conjurer les mauvais arguments mais restent trop peu souvent associés à une véritable réflexion quant à leur signification.

Exercice 2. (De l'implication) Soient $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$. Si $AD = BD$, alors $A = B$.

Preuve. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ tel que $AD = BD$.
Comme D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont non nuls, alors D est inversible. On note D^{-1} son inverse. Alors,

$$\begin{aligned}
AD &= BD\\
ADD^{-1} &= BDD^{-1}, \text{ en multipliant à droite par } D^{-1}\\
AI_2 &= BI_2, \text{ car } DD^{-1} = I_2.
\end{aligned}$$

Finalement, $A = B$. □

Exercice 3. (De la contraposée) Soit n un entier naturel. Montrer que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve. Montrons le résultat par contraposée, c'est-à-dire, montrons que

$$n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair.
Comme n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$. Ainsi, $n^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair.
Finalement, si n^2 est pair, alors n est pair. □

Exercice 4. (De la récurrence) Montrer par récurrence que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ce raisonnement peut être utilisé dès qu'une propriété doit être montrée pour tout entier naturel à partir d'un certain rang. À noter que ce type de raisonnement peut être étendu à des récurrences avec prédécesseurs ou à un cadre plus général dans tout ensemble muni d'une relation bien fondée. Les différentes étapes du raisonnement doivent être mises en valeur.

Preuve.
Initialisation. Pour $n = 0$, $\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $\frac{n(n+1)}{2} = 0$. Ainsi, la propriété est vraie à l'ordre 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k &= \sum_{k=0}^{n} k + (n+1), \quad \text{d'après l'associativité de la somme}\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1), \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion. Finalement, d'après le théorème de récurrence,

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

On notera que, dans son développement, un raisonnement par récurrence se doit d'utiliser l'hypothèse de récurrence. Dans le cas contraire, il peut s'avérer judicieux de changer de rédaction. Enfin, en règle générale, montrer une égalité par récurrence, nécessite d'en connaître les deux membres. Ainsi, ce raisonnement n'est pas forcément naturel et il est bon de réfléchir à des raisonnements moins lourds et plus directs.

Exercice 5. (Du raisonnement par l'absurde) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Preuve. Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors, il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ tel que $p \wedge q = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Alors, $p^2 = 2q^2$ et $2|p^2$. Ainsi, p^2 est pair et, d'après l'exercice précédent, p est pair. Ainsi, il existe un entier $\widetilde{p}$ tel que $p = 2\widetilde{p}$, soit $q^2 = 2\widetilde{p}^2$. Ainsi, $2|q^2$ et, toujours d'après l'exercice précédent, $2|q$. Rappelons que $2|p$. Alors, $2|(p \wedge q)$. Or, $p \wedge q = 1$. On obtient ainsi une contradiction.
Finalement, $\sqrt{2}$ est irrationnel. □
Dans les raisonnements par l'absurde, la contradiction doit arriver à la fin et être mise en valeur. Elle nécessite alors d'avoir une hypothèse initiale écrite explicitement de manière à pouvoir en écrire la négation aisément.

Exercice 6. (De la disjonction des cas) Montrer qu'il existe deux irrationnels α et β tels que α^β soit rationnel.

Preuve. Rappelons que $\sqrt{2}$ est irrationnel et posons $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.
Raisonnons par disjonction de cas.

- **1er cas.** Si a est rationnel, alors poser $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ répond au problème.
- **2ème cas.** Si a est irrationnel, on pose $\alpha = a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $\beta = \sqrt{2}$. Alors, α et β sont irrationnels et $\alpha^\beta = \sqrt{2}^2 = 2$ est rationnel.

Finalement, il existe α et β tels que α^β soit rationnel. □

Exercice 7. (Analyse / synthèse) Déterminer l'ensemble des réels x tels que $3\,|2 - x| + 2\,|x - 5| = 7$.

Preuve. On raisonne par Analyse / Synthèse.
Analyse. Soit x une solution de l'équation.

- **1^er^ cas :** Si $x \leqslant 2$. Alors,

$$\begin{aligned}3\left|2-x\right|+2\left|x-5\right| &= 7\\ 3(2-x)+2(5-x) &= 7\\ 16-5x &= 7\\ x &= \frac{9}{5}.\end{aligned}$$

- **2^e^ cas :** Si $2 \leqslant x \leqslant 5$. Alors,

$$\begin{aligned}3\left|2-x\right|+2\left|x-5\right| &= 7\\ 3(x-2)+2(5-x) &= 7\\ x+4 &= 7\\ x &= 3.\end{aligned}$$

- **3^e^ cas :** Si $x \geqslant 5$. Alors,

$$\begin{aligned}3\left|2-x\right|+2\left|x-5\right| &= 7\\ 3(x-2)+2(x-5) &= 7\\ 5x-16 &= 7\\ x &= \frac{23}{5}.\end{aligned}$$

Synthèse :
- $\frac{9}{5}$ est bien solution de l'équation sur l'intervalle $]-\infty;2]$.
- 3 est bien solution de l'équation sur l'intervalle $[2;5]$.
- $\frac{23}{5}<5$, donc l'équation n'a pas de solution sur l'intervalle $[5;+\infty[$.

Finalement, l'ensemble des solutions réelles de l'équation $3\left|2-x\right|+2\left|x-5\right|=7$ est

$$\left\{\frac{9}{5},3\right\}$$

□

II.2 Une preuve ne devrait jamais ressembler à ça...

L'épilogue est à la fin, le prologue est au début.

Ainsi, il est généralement malvenu de gâcher le récit en dévoilant prématurément la fin . Bien entendu, le résultat à atteindre peut être énoncé en début de preuve : si vous partez en randonnée en groupe, il est préférable d'avertir de l'objectif à atteindre ensemble.

Exemple 1 (Calcul sans queue ni tête).

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} k &= n(2n+1)\\ \sum_{k=1}^{n} k+\sum_{k=n+1}^{2n} k &= n(2n+1)\\ \sum_{k=1}^{n} k+\sum_{\ell=1}^{n}(2n-\ell+1) &= n(2n+1)\\ \sum_{\ell=1}^{n}(2n+1) &= n(2n+1)\\ \sum_{\ell=1}^{n} 1 &= n\\ 0 &= 0.\end{aligned}$$

Certains ajouteraient même des $\Leftrightarrow$ en début de chacune des lignes pour paraître plus crédibles.

Préférer les sauts de grenouilles aux pas de géants.

Dans un récit, tous les éléments doivent être reliés les uns aux autres et il est malvenu de faire intervenir dans la résolution un fait qui n'avait pas été porté préalablement à la connaissance du lecteur. Ceci inclut :

- ne pas justifier le passage entre deux arguments ;
- oublier trop d'étapes entre deux arguments ;
- utiliser un théorème profond sans le prouver ;
- utiliser un théorème profond sans le mentionner.

Exemple 2 (Démonstration d'initiés).

D'après le théorème de Gelfond-Schneider, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel. Ainsi, il existe deux irrationnels α et β tels que α^β soit rationnel.

La fin ne justifie pas tous les moyens.

Dans une preuve, si vous utilisez des arguments faux pour arriver à vos fins, la preuve reste fausse.

Exemple 3.

Soit n un entier supérieur à 2. Montrer que l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$ est $\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

Soit z tel que $z^n = 1$. Alors, pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, $z^n = \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^n$. Ainsi, en prenant la racine n^{e} des deux membres de l'égalité, $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

On remarque que, d'une part, la notion de racine n^{e} n'a aucun sens dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ et, d'autre part, que nous n'avons pas prouvé ici que ce sont les seules solutions possibles.

Le brassement d'air.

À certains moments, les justifications précises sont remplacées par une grande agitation des bras.

Exemple 4.

Déterminer les fonctions f dérivables telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

Comme f est dérivable et que la fonction exponentielle satisfait l'équation, alors l'ensemble des solutions est $\left\{ x \mapsto e^{\lambda x},\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

Les erreurs de logique.

Le piège majeur qui nous guette ici est le sens des implications. Il est important de bien énoncer les propriétés sous la forme *Si . . . , alors . . .* pour lever toute ambiguïté quant à leur sens.

Exemple 5.

Comme f est continue, alors f est dérivable.
C'est bien sûr l'implication réciproque qui est vraie !

Les sur-hypothèses.

Résoudre une question en ajoutant des hypothèses ne permet pas de la résoudre. Cependant, cela peut permettre de traiter des cas intéressants qui soutiennent l'intuition. Il ne faudra cependant pas oublier de traiter le cas général !

Exemple 6.

Déterminer les fonctions telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme f est dérivable, en dérivant par rapport à la variable x, alors

$$y f'(xy) = f'(x)$$

En particulier, pour tout x réel, $f'(x) = 0$. Ainsi, f est constante. On montre alors que f est constante égale à 0 ou constante égale à 2.

III. Vaincre l'angoisse de la page blanche

Pour pouvoir envisager la preuve, il faut, dans un premier temps, ne pas tenir compte des conseils énoncés dans ces pages, et ce, pour pouvoir débrider l'imagination. Cette phase devra bien sûr être tenue *secrète* et ne devra pas quitter le brouillon !

Pour faciliter cette phase de recherche, avant de se lancer dans une preuve, il est nécessaire de regarder la question posée dans le blanc des yeux. Ensuite, vous pouvez créer les conditions qui vont vous amener vers une source d'inspiration. Vous pouvez notamment utiliser les stratégies suivantes :

- Écrire explicitement les définitions et hypothèses en les traduisant éventuellement sous différentes formes.
- Écrire explicitement la conclusion en la traduisant éventuellement sous différentes formes.
- Essayer de voir si un résultat connu (au programme) ne permet pas de relier les hypothèses à la conclusion.
- Essayer de voir si la trame d'une preuve que vous auriez déjà rencontrée ne peut pas s'adapter à ce nouveau contexte.
- Manipuler ces expressions de manière à voir apparaître un gué qui relie les deux rives de la preuve. Il faudra cependant penser à écrire ensuite la preuve dans le bon ordre.
- Essayer de faire des grands sauts pour voir où la construction nous mène. Puis, dans un second temps, envisager les petits pas qui permettent de justifier ces grands sauts.

Enfin, il est toujours bon de relire votre preuve pour vous assurer que chacune des étapes que vous avez écrites fait sens. Dans cette phase de relecture, il faut éloigner la frénésie première qui vous a permis de construire cette histoire et vous mettre dans la peau d'un relecteur stupide, sceptique et pointilleux. Vous devez, à chaque instant, prétendre que vous ne comprenez pas ce qui est écrit pour voir si votre preuve vous convainc du contraire !