



I. Intégration sur un segment

Exercice 1. (♣) Étudier la fonction $f : x \mapsto \int_0^x [t] dt$ sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 2. (Fonction bêta, ♣, ♥) Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on note $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$.

- Déterminer une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p+1,q-1}$.
- Exprimer la valeur de $I_{p,q}$ à l'aide de factorielles.

Exercice 3. (♣) Montrer qu'il n'existe pas de fonction g continue sur $[0, 1]$ telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $\int_0^1 \max\{x, t\} g(t) dt = 1$.

Exercice 4. (♣) [TPE] Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Exercice 5. Soit f une fonction deux fois dérivable définie sur $[0, 1]$ telle que $f'' \leq 0$. En commençant par étudier le cas où $f'(\frac{1}{2}) = 0$, montrer que $\int_0^1 f(t) dt \leq f(\frac{1}{2})$.

Exercice 6. Déterminer les limites des suites suivantes.

- $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sum_{k=0}^n \tan\left(\frac{k\pi}{4n}\right)$.
- $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.
- $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

II. Convergence d'intégrales - Intégrabilité

Exercice 7. Étudier l'intégrabilité, en fonction des paramètres éventuels, des fonctions sur les domaines indiqués. On suppose $a > -1$.

- | | |
|---|--|
| 1. $x \mapsto \frac{\ln(1+ax^2)}{x^2}$ sur $]0, 1]$ | 3. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ sur $]0, +\infty[$ |
| 2. $x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{ x (1+x^2)}}$, $] -\infty, 0]$ | 4. $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x^2 \ln^2(x)}$ sur $[2, +\infty[$ |

Exercice 8. [ENSAM] Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ définie sur $]1, +\infty[$.

- Étudier et tracer la fonction f .

Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k^2-n^2}}$.

- Étudier la convergence et la limite de la suite (S_n) .
- Même question avec la suite (nS_n) .

Exercice 9. (Intégrales de FRESNEL) Déterminer la nature de

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$$

Exercice 10. [CCP] Donner la nature des intégrales

- $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt$
- $J = \int_0^{+\infty} \sin(t) \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge. Montrer que, pour tout réel x positif, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ converge.

Exercice 12. [ENSAM] Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+ et à valeurs réelles telle que $f(0) = 0$. On suppose que f et f'' sont de carrés intégrables. Montrer que f' est de carré intégrable et que

$$\left(\int_0^{+\infty} (f')^2\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2\right) \left(\int_0^{+\infty} (f'')^2\right).$$

Exercice 13. [Mines] Soit $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$; donner une expression de f' .

2. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0, et quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que f est intégrable et donner une expression de $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

III. Calculs d'intégrales

Exercice 14. [ENSAM] Existence et calcul de $I = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

Exercice 15. [Mines] Montrer l'existence puis calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\tanh(3x) - \tanh(x)}{x} dx$.

Exercice 16. [CCP] Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que $\int_a^b tf(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$.

2. Calculer $\int_0^\pi \frac{t}{1 + \cos^2(t)} dt$.

Exercice 17. [CCP] Soient $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$.

1. Montrer que I et J sont convergentes et que $I = J$.

2. Calculer $I + J$ et en déduire I et J .

Exercice 18. (Polynômes d'HERMITE) [TPE] Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{\pi}$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = f(x)P_n(x)$. Préciser le degré, la parité et le coefficient dominant de P_n .

2. Montrer l'existence puis calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)P_n(x)P_m(x) dx$.

Exercice 19. Montrer la convergence et déterminer la valeur des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} \quad \left| \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln(x)}{(1+x^4)^3} dx$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{x \ln(x)}{(1+x^2)^2} dx$$

Exercice 20. (Intégrale de GAUSS, ♡)

1. Montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n}.$$

2. En déduire que $\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \sim \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) d\theta$.

En utilisant les intégrales de **WALLIS**, on montre que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 21. [Mines] Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{(1+x)^2} dx$.

IV. Avec Python

Exercice 22. [Centrale] Pour $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{n \sin^2(x)} dx$ et

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{nx^2} dx.$$

1. a) Justifier l'existence de I_n .

b) Écrire une fonction Python qui calcule I_n . Conjecturer, à l'aide de l'ordinateur, la valeur de I_n (on ne demande pas de preuve).

2. a) Justifier l'existence de J_n .

b) À l'aide de l'ordinateur, conjecturer la convergence de la suite (J_n) puis la prouver en utilisant I_n .

c) Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ et calculer sa valeur.

Mathématiciens

WALLIS John (23 nov. 1616 à Ashford-28 oct. 1703 à Oxford).

GAUSS Johann Carl Friedrich (30 avr. 1777 à Brunswick-23 fév. 1855 à Göttingen).

FRESNEL Augustin (10 mai 1788 à Broglie-14 juil. 1827 à Ville d'Avray).

HERMITE Charles (24 déc. 1822 à Dieuze-14 jan. 1901 à Paris).