Stanislas
Exercices

Probabilités sur des ensembles dénombrables

PSI
2021-2022

Chapitre VI

■ ■ ■

I. Ensembles dénombrables

Exercice 1. (Discontinuités des fonctions monotones, ♡) Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ une fonction croissante. Pour tout $x \in]a,b[$, on pose $v_f(x) = f(x^+) - f(x^-)$.

1. Soit $x \in]a,b[$. Montrer que $v_f(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si f est continue en x.

2. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1 < \cdots < x_p$ des réels de $]a,b[$. Montrer que $\sum_{j=1}^{p} v_f(x_j) \leqslant f(b) - f(a)$.

3. En déduire que pour tout $\alpha > 0$, l'ensemble des points $x \in]a,b[$ tels que $v_f(x) > \alpha$ est fini.

4. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

Exercice 2. (Nombres algébriques, ➹) Un nombre z est *algébrique* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0.$$

Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

II. Dénombrement

Exercice 3. (✍) Un maçon dispose de n briques indistinguables pour construire un mur vertical sans trous. Ainsi, toute brique se trouve soit sur le sol, jouxtant une autre brique, soit posée sur une autre brique. Déterminer le nombre de formes de murs distinctes que le maçon peut construire.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et E un ensemble fini à n éléments. Combien y-a-t-il de couples $(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$?

Exercice 5. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$. Combien y-a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

Exercice 6. (Surjections) Soient $n \leqslant p$ des entiers et $\mathscr{S}_n^p$ l'ensemble des surjections de $E = [\![1,p]\!]$ dans $F = [\![1,n]\!]$ et S_n^p son cardinal.

1. Pour tout entier $k \in [\![1,n]\!]$, déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathscr{A}_k = \{f \in \mathscr{F}(E,F)\ ;\ f^{-1}(\{k\}) = \emptyset\}$.

2. En utilisant la formule du crible, en déduire que

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

III. Probabilités

Exercice 7. [CCP] Deux joueurs jouent avec des pièces équilibrées. Ils lancent chacun n fois une pièce. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre de fois pile. Quelle est la probabilité qu'il y ait un gagnant ?

Exercice 8. (Quelle est la taille du paquet ?) Un paquet de 10 cartes numérotées de 1 à 10 est mélangé. Trois cartes sont extraites tour à tour du paquet. Quelle est la probabilité que ces trois cartes soient triées par ordre croissant ?

Exercice 9. Soient n un entier naturel non nul. On choisit aléatoirement et indépendemment deux parties A et B de $[\![1,n]\!]$ avec une loi d'équiprobabilité. Déterminer la probabilité que A soit inclus dans B.

Exercice 10. Soit $x \in]0,1[$ et $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose qu'il existe une famille d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier naturel n,

$$\mathbb{P}\left(A_n \cap A_{n+1}\right) = x\mathbb{P}\left(A_n\right) \text{ et } \mathbb{P}\left(\overline{A_n} \cap \overline{A_{n+1}}\right) = x\mathbb{P}\left(\overline{A_n}\right).$$

Montrer que $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 11. (Tasses & Soucoupes,) Six tasses et soucoupes sont appareillées : deux sont de couleur rouge, 2 sont de couleur blanche et 2 sont de couleur noire. Les soucoupes sont alignées et les tasses sont placées aléatoirement sur les soucoupes, quelle est la probabilité qu'aucune des tasses ne soit sur une soucoupe de la même couleur.

Exercice 12. (Simuler la loi uniforme,) On considère une pièce de monnaie biaisée qui, quand on la lance, renvoie face avec probabilité $p \in]0,1[$. Montrer comment simuler une pièce équilibrée à l'aide de cette pièce.

IV. Probabilités conditionnelles, Indépendance

Exercice 13. [X] On dispose d'un test pour déterminer si un individu est atteint par une maladie donnée. La probabilité qu'un individu soit malade est $1/100000$, la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu est malade est $99999/100000$, la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade est $1/10000$. Déterminer la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif.

Exercice 14. [X] On a deux dés équilibrés, un bleu et un rouge. On note A l'événement *la somme des deux est égale à* 9. Trouver deux événements relatifs au dé rouge tels que $\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A\cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A\cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(B\cap C) \neq \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Exercice 15. [Centrale]

1. Soit $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

2. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. On dispose de p urnes numérotées de 1 à p. Chaque urne contient p boules et pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules noires et $p-i$ boules blanches. On effectue l'expérience suivante : choisir au hasard une urne puis effectuer des tirages avec remise dans l'urne choisie. On note, pour $n\in\mathbb{N}^*$, A_n l'événement *on a effectué* $2n$ *tirages et obtenu le même nombre de boules blanches que de noires.*

a) Exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ sous forme d'une somme.

b) On note $b_{n,p}$ la probabilité que la prochaine boule tirée soit blanche sachant que A_n est réalisé. Exprimer $b_{n,p}$.

c) Calculer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} b_{n,p}$.

Exercice 16. [Mines] On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, de paramètre $p\in]0,1[$. On appelle doublet le fait d'obtenir deux succès à la suite. On pose les événements suivants : A_n *obtenir le premier doublet au rang* n et B_n *obtenir au moins un doublet au cours des* n *premières épreuves*. Enfin, on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $q = 1-p$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^n p_k$. Montrer que $p_{n+3} = p^2q\left(1-\sum_{k=1}^n p_k\right)$.

2. En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1} et p_n.

3. Exprimer matriciellement cette relation de récurrence.

Exercice 17. (Fonction indicatrice d'Euler, ♡) Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. L'ensemble $\Omega=[\![1,n]\!]$ est muni de l'algèbre $\mathscr{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on note A_k l'ensemble des entiers de Ω divisibles par k.

1. Montrer que si $k|n$, alors $\mathbb{P}(A_k)=\frac{1}{k}$.

2. Soient $k_1,\dots,k_r$ des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux. Montrer que les événements $A_{k_1},\dots,A_{k_r}$ sont mutuellement indépendants.

On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers divisant n.

3. Montrer que la probabilité qu'un élément de Ω soit premier avec n vaut
$$\prod_{p\in\mathscr{P}_n}\left(1-\frac{1}{p}\right).$$

La fonction $\varphi\ :\ n\mapsto n\cdot\prod_{p\in\mathscr{P}_n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ est la fonction indicatrice d'Euler.

4. Soit d un diviseur de n tel que $n=kd$. Déterminer le cardinal de l'ensemble $B_d=\{j\cdot d,\ j\in[\![1,k]\!]\ ;\ j\wedge k=1\}$.

5. En déduire que $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.

V. Avec Python

Exercice 18. [Centrale] On considère une particule qui se déplace sur l'ensemble des entiers naturels selon les règles suivantes :

* À l'instant $n = 0$, la particule se trouve en 0.
* Si la particule se trouve en $k > 0$ à l'instant n, elle se déplace en $k+1$ à l'instant $n+1$ avec probabilité $2^{-(k+1)}$ et vers $k-1$ avec probabilité $1-2^{-(k+1)}$.
* Si la particule se trouve en 0 à l'instant n, elle se déplace vers 1 avec probabilité $1/2$ et reste en 0 avec probabilité $1/2$.

1. Écrire une fonction `saut` qui, à partir de la position de la particule, renvoie sa position à l'instant suivant.

2. Écrire une fonction `simulation` de variables (n, N), qui renvoie la liste des positions de la particule à l'instant n pour N simulations.

3. Écrire une fonction `histogrammes` de variables (n, N) qui, pour N simulations de déplacements de longueurs n, renvoie le nombre de fois où la particule finit en 0, en 1,...

4. Pour $k \geqslant 1$, on note p_k la probabilité que la particule, placée en k, avance en $k+1$ puis revienne en k après 2 pas de temps. Expliciter p_k puis montrer que $p_k \leqslant 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{8}$.

5. Pour tout entier naturel n, on note q_n la probabilité que la particule, partie de l'origine, revienne pour la première fois à l'origine à l'instant n. Déterminer q_4 et q_6.

Mathématiciens

Euler Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).