Stanislas
Exercices

Espaces vectoriels normés de dimension finie

PSI
2021-2022

Chapitre X

■ ■ ■

I. Normes

Exercice 1. (✍) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $\|(x,y)\| = \max\{|x+y|, |x-2y|\}$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.

Exercice 2. [TPE] Pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note $N(u) = \sup\{|x+ty|, t \in [0,1]\}$.

1. Montrer que $N(u) = \max\{|x|, |x+y|\}$, puis que N est une norme.

2. Soit B la boule unité de N. Trouver le plus petit disque euclidien centré en 0 contenant B et le plus grand disque euclidien centré en 0 contenu dans B.

On pourra commencer par représenter graphiquement la boule unité.

Exercice 3. E désigne l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{(x,y)\in[0,1]^2,\, x\neq y} \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|.$$

Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 4. [IMT] On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on note $N(f) = \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$.

1. Montrer que N est une norme sur E.

2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N(f)$.

3. Montrer qu'il n'existe pas de réel a strictement positif tel que : $\forall f \in E$, $N(f) \leqslant a\|f\|_\infty$.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 2$. Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \mathscr{G}\!\ell_n(\mathbb{C}), \left\|PAP^{-1}\right\| = \|A\|.$$

Exercice 6. (✎) Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme $\|\cdot\|$ et $f \in E^*$ non nulle. On note $H = \operatorname{Ker} f$ et $\|f\| = \sup_{a\in\overline{\mathscr{B}}(0,1)} |f(a)|$. Soit $x \in E$.

1. Montrer que pour tout $y \in H$, $|f(x)| \leqslant \|f\|\,\|x-y\|$.

2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in \overline{\mathscr{B}}(0,1)$ tel que

$$\|f\| - \varepsilon \leqslant |f(a)|.$$

3. En déduire que $d(x,H) = \inf_{y\in H} \|x-y\| = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

Indication : On pourra poser $h = x - \frac{f(x)}{f(a)}a$.

II. Topologie générale

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants sont des fermés.

1. $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.

2. $\left\{(-1)^{n+1} + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\right\}$.

3. $\left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}, (m,n) \in (\mathbb{N}^\star)^2\right\}$.

Exercice 8. Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Montrer que, en général, il n'y pas égalité.

2. Montrer que $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 9. (✍) Soient A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. On suppose que (A^k) converge vers une matrice P et (B^k) converge vers une matrice Q. Montrer que P et Q commutent.

Exercice 10. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que (A^k) converge vers une matrice B. Montrer que B est la matrice nulle.

Exercice 11. [CCP] Soit E l'ensemble des suites numériques réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2$ converge.

1. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espaces des suites numériques réelles.

3. Soit $\varphi : ((x_n),(y_n)) \in E^2 \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n \in \mathbb{R}$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E ; En déduire que $\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2}$ est l'expression d'une norme, notée N, sur E.

4. Montrer que, pour (x_n) dans E, la suite $(x_n + x_{n+1})$ l'est aussi.

5. Soit $g : (x_n) \in E \mapsto (x_n + x_{n+1}) \in E$. Montrer que g est lipschitzienne pour la norme N.

Exercice 12. (✎, ♡) [Mines] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique. On note $G_f = \{T \in \mathbb{R} \ ; \ \forall\, x \in \mathbb{R},\, f(x+T) = f(x)\}$.

1. On suppose que f est continue. Montrer que G_f est un fermé.

2. Donner un exemple de fonction pour laquelle $G_f = \mathbb{Q}$.

3. Soit f une fonction 1 et $\sqrt{2}$ périodique. Montrer que $f(x) = f(0)$ possède une infinité de solutions dans $]0, \pi/2[$.

Exercice 13. [Mines] Soient E un espace vectoriel normé, $\|\cdot\|$ une norme sur E. Pour tout $A \subset E$ et $x \in E$, on définit $d(x,A) = \inf\{d(x,y),\, y \in A\}$.

1. Soit F un fermé non vide de E. Montrer que x appartient à $E \backslash F$ si et seulement si $d(x,F) > 0$.

2. Montrer que tout ouvert de E est réunion dénombrable de fermés.

III. Avec Python

Exercice 14. [Centrale 2] La matrice $M = (m_{i,j})$ est dite à diagonale strictement positive (abrégé en DSP) si

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\, |m_{i,i}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |m_{i,j}|\,.$$

1. Écrire un programme `est_dsp(M)` qui renvoie `True` si `M` est à DSP et `False` sinon.

2. Trouver une matrice de $O_2(\mathbb{R})$ qui ne soit pas à DSP ; tester le programme sur cette matrice.

3. Les matrices à DSP sont-elles stables par produit ?

4. Pour tout vecteur X, on note $\|X\|_\infty = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$. Soit M à DSP. Montrer que si $X \neq 0$, alors $MX \neq 0$. Qu'en déduire sur M ?

5. Écrire une fonction `rmin` déterminant

$$r_{min} = \inf\left\{ |m_{i,i}| - \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |m_{i,j}|\,,\, i \in [\![1,n]\!] \right\}.$$

6. Prouver que l'ensemble des matrices à DSP est une partie ouverte de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.