Espaces vectoriels préhilbertiens

Chapitre XIII

■ ■ ■

I. Produits scalaires, Familles de vecteurs

Exercice 1. (✍) [CCP] On définit, sur $(\mathbb{R}_n[X])^2$, $\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire.

2. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2. (✍) [CCP] Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $f \in \mathscr{GL}(E)$ un automorphisme tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, si $\langle x, y\rangle = 0$, alors $\langle f(x), f(y)\rangle = 0$.

1. Que dire de la famille $\mathscr{B}' = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$?

2. En calculant $\langle f(e_i) + f(e_j), f(e_i) - f(e_j)\rangle$ de deux façons, montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|f(e_i)\|^2 = a^2$. Que dire de la famille $\frac{1}{a}\mathscr{B}'$?

Exercice 3. [TPE] Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ et $\mathscr{G} = (y_1, \ldots, y_p)$ deux familles de vecteurs de E telles que pour tout $(i,j) \in [\![1, p]\!]^2$, $\langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle$.

1. Montrer que $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si $\mathscr{G}$ est libre.

2. Montrer que $\dim \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) = \dim \operatorname{Vect}(\mathscr{G})$.

3. On note $F = \operatorname{Vect} \mathscr{F}$ et $G = \operatorname{Vect} \mathscr{G}$. En déduire qu'il existe une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ telle pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $f(x_i) = y_i$ et pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

Exercice 4. Soient $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ une famille de E et $x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i \in E$. Montrer que $\|x\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2\right)$.

Exercice 5. (Famille obtusangle) [X-ENS] Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$.

1. Soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ une famille de vecteurs de E telle que pour tout $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle < 0$. Montrer que $p \leqslant n+1$.

2. Montrer que le cas $p = n+1$ est possible.

3. Soient $\mathscr{B} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de E telle que pour tout $i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle \leqslant 0$ et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in E$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x, x_i\rangle \geqslant 0$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geqslant 0$.

Exercice 6. [Centrale] Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on définit

$$f(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire.

2. Montrer

$$\exists\, P_n \in \mathbb{R}_n[X]\ ;\ \forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ Q(1) = \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

3. Montrer que P_n possède n racines simples dans $[-1,1]$.

Exercice 7. (✍) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Montrer que

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|{}^tAX\right\| \leqslant \|X\|.$$

Exercice 8. [Centrale] Soit (E, N) un espace vectoriel normé.

1. On suppose que N est euclidienne.

a) Montrer que N satisfait l'identité du parallélogramme.

b) Donner une expression du produit scalaire en fonction de N.

c) La norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifie-t-elle l'identité du parallélogramme ?

2. On suppose que la norme N sur E vérifie l'identité du prallélogramme. On pose $f(x,y) = N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2$ pour tout $(x,y) \in E^2$.

a) Soit $(x,x',y)\in E^3$. Montrer que

$$f(x+x',y)=2f(x,y/2)+2f(x',y/2)$$

b) En déduire que $f(x+x',y)=f(x,y)+f(x',y)$.

c) Montrer que pour tous $(x,y)\in E^2$ et $t\in\mathbb{R}$, $f(tx,y)=tf(x,y)$.

d) Conclure que f est un produit scalaire et que la norme N est euclidienne.

Exercice 9. (Matrice de Gram, ♡) Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille d'éléments de E. On définit

$$G(x_1,\dots,x_p)=\det[(\langle x_i,x_j\rangle)_{i,j\in[\![1,p]\!]}].$$

1. Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée si et seulement si $G(x_1,\dots,x_p)=0$.
On pourra montrer que si la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est libre, alors $G(x_1,\dots,x_p)>0$.

2. Soit $(\lambda,\lambda_2,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{R}^{p+1}$ et $x=x_1+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i x_i$. Montrer que $G(x,x_2,\dots,x_p)=G(x_1,\dots,x_p)$ et $G(\lambda x_1,\dots,x_p)=\lambda^2 G(x_1,\dots,x_p)$.

3. Soit $(x_1,\dots,x_p)$ est une famille libre et $F=\mathrm{Vect}\{x_1,\dots,x_p\}$. Montrer que

$$d(x,F)^2=\frac{G(x,x_1,\dots,x_p)}{G(x_1,\dots,x_p)}.$$

Exercice 10. [X-ESPCI] Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M\in H \iff \mathrm{Tr}(AM)=0.$$

Soit $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel $r\in[\![1,n]\!]$, on note $B=E_{1,n}+\sum_{i=2}^{n}E_{i,i-1}$ et $J_r=\sum_{i=1}^{r}E_{i,i}$.

2. Calculer J_rB.

3. Montrer que B est inversible.

4. En déduire que H contient une matrice inversible.

Exercice 11. [ENS] Soient $n\geqslant 1$, $m\geqslant 1$, $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On définit, pour tout $X_0\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système (X_k) de la manière suivante :

$$\forall\, k\in\mathbb{N}^*,\ X_k=AX_{k-1}+BU_{k-1},$$

où (U_k) est une famille de vecteurs de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.
Le système (A,B) est dit *contrôlable* si pour tous $N\geqslant n$, $(\widetilde{X}_0,\widetilde{X}_N)\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, il existe $(U_i)\in\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})^N$ tel que le système (X_k) défini par $X_0=\widetilde{X}_0$ et, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $X_k=AX_{k-1}+BU_{k-1}$ est tel que $X_N=\widetilde{X}_N$.

1. Exprimer X_n en fonction de A, B, X_0, $U_0,\dots,U_{n-1}$.

On pose $C=[B,AB,\dots,A^{n-1}B]\in\mathscr{M}_{n,nm}(\mathbb{R})$, matrice définie par blocs.

2. On suppose que $\mathrm{Rg}(C)<n$. Montrer l'existence de $X\neq 0$ tel que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, ${}^tXA^kB=0$. En déduire que le système n'est pas contrôlable.

On suppose à présent que le système n'est pas contrôlable et on note N le rang à partir duquel il n'est plus contrôlable.

3. Montrer que $F:(U_0,\dots,U_{N-1})\mapsto\sum_{i=0}^{N-1}A^iBU_{N-1-i}$ définie de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})^N$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est linéaire et non surjective.

4. Montrer qu'il existe $X\neq 0$ tel que pour tout $(U_0,\dots,U_{N-1})$, ${}^tX\left(\sum_{i=0}^{N-1}A^iBU_{N-1-i}\right)=0$.

5. En déduire que $\mathrm{Rg}(C)<n$.

6. Donner une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité.

II. Projections

Exercice 12. (✍) Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ et $x_1-x_2+x_3-x_4=0$. Déterminer la projection orthogonale sur F et, pour tout $x\in\mathbb{R}^4$, calculer $d(x,F)$.

Exercice 13. [CCP] Soient P, $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ et $\langle P,Q\rangle=\sum_{k=0}^{n}P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire.

2. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \; ; \; P(1) = 0\}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la dimension de E.

b) Calculer la distance $d(1, E)$.

Exercice 14. [CCP] On définit $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer $d = \displaystyle\min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 15. [Mines] L'espace $E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{[-1,1]} PQ$. Soit $F = \left\{P \in E \; ; \; \langle X^2 - 1, P'\rangle = \langle X, P\rangle\right\}$ et $Q = 1 + X + X^2 + X^3$. Déterminer $d(Q, F)$.

Exercice 16. [Mines] Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels et $\Phi : (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les a_k pour que Φ soit un produit scalaire.

2. Calculer la distance de X^n à $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \; ; \; \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\right\}$.

III. Avec Python

Exercice 17. [Centrale 2] On étudie les matrices échiquier. Par exemple, la matrice échiquier d'ordre 4 est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Écrire une fonction `echiquier(n)` qui à un entier n renvoie la matrice échiquier de dimension n.

b) Écrire une fonction qui renvoie la liste des matrices échiquier de taille $2p$ où $p \in [\![1, 100]\!]$.

c) Calculer, pour toute matrice M de la liste précédente, $M^3 - p^2 M$. Conjecturer un résultat plus général puis le démontrer.

2. a) Justifier, sans utiliser le polynôme caractéristique, que les matrices échiquier sont diagonalisables.

b) Donner une base des sous-espaces propres de M.

c) Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux.

d) Écrire une fonction `projection(x)` qui calcule le projeté orthogonal du vecteur `x` sur $\operatorname{Ker} M$, où M est la matrice échiquier de taille n.

Mathématiciens

Gram Jorgen Pedersen (27 juin 1850-29 avr. 1916 à Copenhague).