Stanislas
Exercices

# Endomorphismes euclidiens

Chapitre XIV

**PSI**
2021-2022

■ ■ ■

## I. Réduction des matrices symétriques

**Exercice 1.** (✍) Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 2.** Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ 0 & & b & a \end{pmatrix}$. Montrer que $M$ est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

**Exercice 3.** Soit $A$ une matrice symétrique réelle d'ordre $n$. On pose $f : X \mapsto \|AX\|^2 - \langle AX, X\rangle^2$.

**1.** La fonction $f$ est-elle minorée ?

**2.** Montrer que, si $f$ est majorée, alors les valeurs propres de $A$ sont toutes de même signe.

**3.** Lorsque les valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ de $A$ sont toutes de même signe, montrer que $\sup\limits_{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} f(X) = \frac{\lambda_n}{4}$.

**Exercice 4. (Inégalité d'Hadamard, ♡)** Soient $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre $n$ symétriques à valeurs propres strictement positives et $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**1.** Soit $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$. Montrer que $B = (\gamma_i \gamma_j a_{i,j}) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

**2.** Montrer que $\det(A)^{1/n} \leqslant \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n}$.
*On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité arithmético-géométrique.*

**3.** Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} > 0$. On pose $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{a_{i,i}}}$. En déduire que $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

**Exercice 5.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, $a \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice $C = \begin{pmatrix} a & {}^tB \\ B & A \end{pmatrix}$ est définie positive, i.e. pour tout $X \in \mathscr{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXCX \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0_{n+1,1}$.

**1.** Montrer que $A$ est inversible.

**2.** Montrer que l'application $J : \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X \mapsto {}^tXAX - 2{}^tBX + a$ atteint son minimum en $X_0 = A^{-1}B$.

**Exercice 6.** Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. On munit $\mathbb{R}^n$ de l'espace vectoriel usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient $u$ et $v$ deux vecteurs unitaires orthogonaux et $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f : x \mapsto x + \langle u, x\rangle v + \langle v, x\rangle u$.

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$ et que $P = \mathrm{Vect}\,\{u, v\}$ est stable par $f$.

**2.** Montrer que $f$ est diagonalisable et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres.

## II. Endomorphismes orthogonaux

**Exercice 7.** (✍) [CCP] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $B = {}^tAA$.

**1.** Montrer que $B$ n'est pas inversible.

**2.** Montrer que $B$ est diagonalisable.

**3.** Montrer que $0 \in \mathrm{Sp}(B)$ et que $\mathrm{Sp}(B) \subset \mathbb{R}_+$.

**4.** La matrice $A$ est-elle orthogonale ?

**5.** Montrer que $A$ et $B$ commutent.

**6.** Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $-\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

**Exercice 8.** (✍) Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ unitaires. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on note $p(x) = \langle x, u\rangle u$ et $q(x) = \langle x, v\rangle v$. Montrer que $p + q - 2p \circ q$ est une similitude directe, i.e. est la composée d'une rotation et d'une homothétie.

**Exercice 9.** **(✎)** Soient $g \in \mathscr{O}(\mathbb{R}^2)$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer les automorphismes orthogonaux $f$ tels que $f^n = g$.

**Exercice 10.** [ENSAM] Déterminer le cardinal de $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

**Exercice 11.** Soient $E$ une espace vectoriel de dimension 3 et $f$, $g$ deux rotations de $E$ qui ne sont ni des symétries ni l'identité. Si $f \circ g = g \circ f$, que peut-on dire de $f$ et de $g$ ?

**Exercice 12.** **(✍)** Soit $v_1 = (1,1,2)$ et $v_2 = (1,-1,0)$. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour vecteurs propres $v_1$, $v_2$ et $v_1 \wedge v_2$.

**Exercice 13.** [ENSAM] L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne orientée canonique. Soit $\omega$ un vecteur non nul et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \omega \wedge x$.

**1.** Montrer que $f$ est un endomorphisme et que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, $\langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$.

**2.** Trouver un polynôme annulateur de $f$. L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

**3.** Montrer que l'endomorphisme $(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})^{-1}$ est bien défini et déterminer ses propriétés géométriques.

**Exercice 14.** Soient $p$ et $q$ deux projecteurs orthogonaux sur un espace vectoriel euclidien de dimension $n$. On suppose que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

**1.** Montrer que $p \circ q = q \circ p$.

**2.** Montrer que $\mathrm{Sp}(p+q) \subset \{0,1,2\}$. Donner un exemple où il y a égalité.

**Exercice 15.** [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

**1.** Montrer qu'il y a équivalence entre

$(i)$. $\exists\, \Omega \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ ; $M\Omega = \Omega S$.

$(ii)$. $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_M = \chi_S$.

**2.** Décrire les matrices $\Omega$ qui conviennent ?

## III. Avec Python

**Exercice 16.** **(Matrices d'Hadamard)** [Centrale] On note $H_n$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1,1\}$ dont les colonnes sont orthogonales pour le produit scalaire canonique, et $SH_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $H_n$.

**1.** Donner une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et la programmer en Python.

**2.** Soit $A$ une matrice à coefficients dans $\{-1,1\}$. Montrer que $A$ appartient à $H_n$ si et seulement si $A^tA = nI_n$.

**3.** **a)** Que fait la commande Python :
`[[x,y] for x in [0,1] for y in [0,1]]` ?

**b)** Écrire une suite d'instructions en Python qui donne l'ensemble des matrices de $H_4$. Quel est le cardinal de $H_4$ ?

**c)** Même question avec $SH_4$.

**4.** Trouver avec Python l'ensemble $E = \{\mathrm{Tr}(A),\ A \in SH_4\}$. Le démontrer sans Python.

## Mathématiciens

Hadamard Jacques Salomon (8 déc. 1865 à Versailles-17 oct. 1963 à Paris).