Équations différentielles linéaires

Chapitre XV

I. Résolutions d'équations

Exercice 1. [IMT] Résoudre l'équation différentielle $t(t^2-1)y'+2y=t^2$. Y-a-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\sinh x)y'-y\cosh x=-1$.

Exercice 3. [CCP] On considère l'équation différentielle

$$x(1-x)y''+(1-3x)y'-y=0$$

1. Déterminer les fonctions développables en série entière solutions de $(*)$. Pourquoi y a-t-il d'autres solutions sur $]0,1[$?

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.
Indication. On effectuera le changement de variable $y(x)=z(x)/(1-x)$ et on soignera les raccords.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $ty'+y=3t^2\cos(t^{3/2})$.

1. Déterminer une solution de l'équation différentielle développable en série entière au voisinage de 0.

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5. [X-ENS] Déterminer toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t=1.$$

Exercice 6. [Mines] Déterminer une condition sur la fonction $\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pour que la fonction $f:t\mapsto\frac{t}{\cosh(t)}$ soit solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+\lambda y'+y=0$. Résoudre alors cette équation.
Indic. : Étudier la fonction $f\cdot\cosh$.

II. Coefficients constants

Exercice 7. [IMT] Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et une base de vecteurs propres de A.

3. Résoudre le système différentiel $(x'=x+2z,\ y'=y,\ z'=2x+z)$.

Exercice 8. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' &= x+2y-z\\ y' &= 2x+4y-2z\\ z' &= -x-2y+z\end{cases}.$$

Exercice 9. Soient A une matrice antisymétrique d'ordre n et X une solution du système différentiel $X'=AX$. Montrer que $\|X\|$ est constante.

Exercice 10. Dériver $t\mapsto\|X(t)\|^2$.

III. Comportement des solutions

Exercice 11. [Centrale]

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0\in I$, f, $g\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ et $x_0\in\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $y'+f(t)y=g(t)$ admet une unique solution φ telle que $\varphi(t_0)=x_0$. Exprimer φ à l'aide d'intégrales.

2. Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$ et h une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $y'-ay=h$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$.

IV. Avec Python

Exercice 12. [Centrale] Soient $a\in\mathbb{R}$ et $\omega\in\mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer une fonction x de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0 telle que $x''+\omega^2x=0$, $x(0)=0$ et $x'(0)=a$.

2. On considère l'équation différentielle $x''+x=0$, $x(0)=0$ et $x'(0)=a$. En utilisant Python, tracer la courbe représentative de x sur $]0,10]$ pour $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5\}$.

3. Soient $r \in]0,1[$ et $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-r^2\sin^2(\omega u)}}$.

a) Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et impaire.

b) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis que sa réciproque F^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

c) Pour $r=0.9$ et $\omega=1$, en utilisant Python, tracer la courbe représentative de F sur $[-5,5]$.

4. a) Tracer la courbe représentative de $t \mapsto 2\arcsin(r\sin(\omega F^{-1}(t)))$ sur $[-5,5]$.

b) On suppose que $0 < a < 2\omega$. On pose $r = \frac{a}{2\omega}$ et $\varphi(t) = 2\arcsin(r\sin(\omega F^{-1}(t)))$. Montrer que $\varphi'' + \omega^2\sin(\varphi) = 0$.