Calcul différentiel

Chapitre XVII

I. Régularité

Exercice 1. [CCP] Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f(0,0) = 0$. Montrer que la fonction f ainsi définie est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. [CCP] On pose $f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Existence et calcul de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

II. Recherche d'extrema

Exercice 3. [CCP] Déterminer les extrema éventuels sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 4x - y$.

Exercice 4. [CCP] Soit $f : (x,y) \in [-1,1]^2 \mapsto y^3x^4 + \ln(1+y^4)$. Cette fonction admet-elle des extrema globaux ? locaux ?

Exercice 5. Soit φ un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles et $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(x) = \langle \varphi(x), x\rangle - \langle u, x\rangle$. On note $A = (a_{i,j})$ la matrice canoniquement associée à φ.

1. Montrer que, si toutes les valeurs propres de φ sont strictement positives, alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ non nul, $\langle \varphi(h), h\rangle > 0$. On dit alors que φ est un endomorphisme symétrique défini positif.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et expliciter son gradient en tout point.

3. Montrer que f admet un unique point critique si et seulement si φ est défini positif.

4. On suppose que φ n'est pas défini positif. À quelle condition sur u et φ la fonction f possède-t-elle des points critiques ?

5. On suppose que f admet au moins un point critique z. Montrer que f admet en z un minimum global.

6. La fonction f admet-elle des maximums locaux ?

III. Autour des dérivées partielles

Exercice 6. Si f est une fonction à valeurs réelles, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathscr{C}^2$ sur cet intervalle, on lui associe la fonction g définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par $g(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. Le laplacien Δg de g est défini par $\Delta g = \partial_{1,1}^2 g + \partial_{2,2}^2 g$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.

2. Exprimer le gradient de g en fonction de f.

3. Exprimer le laplacien de g en fonction de f.

4. Montrer que $\Delta g = 0$ sur Ω si et seulement si la fonction f est solution, sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $tf'' + f' = 0$.

5. Déterminer la solution de l'équation $\Delta g = 0$ qui s'annule sur l'ensemble $\mathscr{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ x^2+y^2 = 1\right\}$ et qui vaut 1 au point $(1,1)$.

Exercice 7. [Centrale] Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{n^2}\, \mathrm{e}^{-nt}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement. On note S sa somme.

2. Montrer que $f : (x,y) \mapsto S(x^2+y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que les dérivées partielles d'ordre 1 de f existent sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. Montrer que le gradient de f est colinéaire à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Interpréter géométriquement le résultat.

5. Soit γ un arc paramétré $\mathscr{C}^1$, régulier et 1-périodique. Soit $K = \gamma(\mathbb{R})$. Montrer que $f_{|K}$ atteint son minimum.

Exercice 8. [Centrale PC] Résoudre $\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Indication : On posera $(u,v) = \left(x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2}\right)$.

Exercice 9. [X-ENS] Soit $k > 1$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant :

(i). $\forall\, t > 0,\ \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(tx,ty) = t^k f(x,y)$.

(ii). $\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1. Montrer que

$$\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=kf(x,y).$$

En déduire que

$$\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=k(k-1)f(x,y).$$

2. On pose $h:\theta\mapsto f(\cos(\theta),\sin(\theta))$. Montrer que $h''+k^2h=0$.

3. Montrer que f est un polynôme en x et en y.

4. Trouver toutes les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les conditions de l'énoncé.

Exercice 10. [Centrale] Soit f une application $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On note $\Delta(f)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Soit $\widetilde{f}:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$.

1. Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^2$.

2. Calculer $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}$, $\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\theta}$, $\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial\theta^2}$.

3. Montrer que $\Delta f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widetilde{f}}{\partial\theta^2}(r,\theta)+\frac{1}{r}\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$.

4. Soit m l'application définie sur $[0,+\infty[$ par $r\mapsto\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\widetilde{f}(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

a) Montrer que m est de classe $\mathscr{C}^2$.

b) On suppose que f est harmonique, i.e. $\Delta(f)=0$. Montrer que m est constante et déterminer sa valeur.

IV. Courbes et Surfaces

Exercice 11. [TPE] Trouver les plans tangents à la surface d'équation $z^2=xy$ et contenant la droite d'équations $x=2$ et $y+z=1$.

V. Avec Python

Exercice 12. [Centrale] Soit Γ l'arc paramétré défini par

$$t\mapsto((1+\cos(t))\cos(t),(1+\cos(t))\sin(t),4\sin(t/2))$$

1. Déterminer les points réguliers de Γ et le vecteur tangent unitaire en ces points.

2. Montrer que ce vecteur tangent forme un angle constant avec l'axe (Oz).

3. Calculer la longueur de Γ.

4. Tracer les projetés orthogonaux de Γ sur les plans (O,y,z), (O,z,x) et (O,x,y).