■ ■ ■

I. Familles de vecteurs

Indications pour l'exercice 1. On commence par montrer que (f_1, f_2) est libre. Ensuite, on vérifie que $f_3 \in \operatorname{Vect}\{f_1, f_2\}$ et qu'il en va de même pour f_4. □

Indications pour l'exercice 2. Considérer $x_1 < \cdots < x_p$, écrire une combinaison linéaire de $(S_{x_1}, \ldots, S_{x_p})$, puis factoriser par x_p^n et faire tendre n vers l'infini pour montrer que la famille est libre. □

Indications pour l'exercice 3. On peut raisonner par récurrence sur n. Pour l'hérédité, dériver deux fois la combinaison linéaire pour, ensuite, se séparer des termes en $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$. □

Indications pour l'exercice 4. Écrire la matrice de cette famille dans la base $(\cos, \sin)$ puis discuter le rang de cette matrice en fonction des valeurs de a_1, a_2 et a_3. □

II. Matrices & Applications linéaires

Indications pour l'exercice 5. Exprimer A^2 en fonction de A et de I_n. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Classique. On écrit $f(x) = \lambda_x x$ et il faut montrer que si $x \neq y$, alors $\lambda_x = \lambda_y$. On distingue les cas (x, y) liée et (x, y) libre pour lequel on introduira le vecteur $x + y$.

2. On applique le résultat précédent à u^2 et $u^2 = \lambda \operatorname{Id}_E$. On distingue alors les cas $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$ Pour lequel on montre qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs.

3. Le cas $n \leqslant 2$ est aisé. Ensuite, on montre qu'il existe un scalaire μ, un vecteur y et une application linéaire φ tels que $u : x \mapsto \varphi(x)y + \mu x$. □

Indications pour l'exercice 7.

1. Soit H un sous-espace vectoriel de dimension $k+1$. En exhibant une base de H, on peut écrire H comme sous-espaces vectoriels de dimension k.

2. Effectuer une récurrence.

3. Montrer que, pour toute droite D, $u(D) \subset D$. En utilisant un raisonnement classique, montrer alors que u est une homothétie. □

Indications pour l'exercice 8.

1. On montre que $\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$.

2. Raisonner par analyse / synthèse pour obtenir la décomposition. Ou alors, utiliser que $g \circ f$ est un projecteur.

3. Utiliser le théorème du rang pour montrer l'égalité.

4. On montre de la bijectivité.

5. Penser à l'application nulle. □

Indications pour l'exercice 9. Commencer par vérifier que $\mathscr{H}$ est bien un espace vectoriel.
Traiter en premier le cas où $\dim E = \dim F = \operatorname{Rg} f$.
En général, si $g \in \mathscr{H}$, étudier ses restrictions sur $\operatorname{Im} f$ ainsi que sur un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$. □

Indications pour l'exercice 10. Soit $x_0 \in E$ tel que $f^2(x_0) \neq 0_E$. En travaillant dans la base (le vérifier) $(x_0, f(x_0), f^2(x_0))$, montrer que g commute avec f si et seulement si $g \in \operatorname{Vect}\left\{\operatorname{Id}_E, f, f^2\right\}$. □

III. Géométrie

Indications pour l'exercice 11.

1. Déterminer une base de P puis une base de D et montrer que la réunion de ces deux familles forme une famille base de $\mathbb{R}^3$.

2. On peut décomposer tout vecteur (x, y, z) dans la base trouvée à la question précédente. □

Indications pour l'exercice 12. Le sens réciproque est trivial.
Pour le sens direct, utiliser que $q(x) - x \in \operatorname{Ker} q$. □

Indications pour l'exercice 13.

1. Calculer $q \circ q(x)$ en étant précis sur les indices de sommation et en étudiant l'effet des compositions sur le vecteur x.

2. Montrer que $E = \operatorname{Im} q$. □

Indications pour l'exercice 14.

1. Montrer l'inclusion des images puis utiliser l'égalité des dimensions.

2. Montrer que $\operatorname{Im} p_i \subset \operatorname{Ker} p_j$. Pour cela, montrer que, si $x \in \operatorname{Im} p_i$, alors $\sum_{j \neq i} p_j(x) = 0$. En déduire que $p_j(x) = 0$ puis conclure. □

IV. Formes linéaires & Hyperplans

Indications pour l'exercice 15. Penser aux applications coordonnées et à la formule de Taylor polynomiale. □

Indications pour l'exercice 16. Utiliser la base d'interpolation de Lagrange pour montrer que (f_a, f_b, f_c) est libre.
Évaluer ensuite la relation $f_4 = \alpha f_a + \beta f_b + \gamma f_c$ sur la famille $(1, X - a, (X-a)^2, (X-a)^3)$ pour déterminer si cette relation possède des solutions. □

Indications pour l'exercice 17. Raisonner par l'absurde en exhibant ensuite une forme linéaire qui ne s'annule pas en v. □

Indications pour l'exercice 18.

1. On remarque que $\Delta H_k = H_{k-1}$.

2. On raisonner par l'absurde en considérant une combinaison linéaire nulle qu'on évalue ensuite en H_{i_0}, où i_0 est bien choisi. □

V. Avec Python

Indications pour l'exercice 19.

1. Utiliser les propriétés sur les séries convergentes.

2. Utiliser le module `numpy.polynomial`.

3. Penser aux polynômes de degrés étagés.

4. En écrivant $H_n(k)$ sous forme factorielle, on obtient $S(H_n) = \mathrm{e}$.

5. □