## I. Calculs de déterminants

**Indications pour l'exercice 1.** Développer 2 fois selon la première ligne pour obtenir une relation de récurrence d'ordre 2 qu'il suffit alors de résoudre. □

**Indications pour l'exercice 2.** On pourra introduire le vecteur colonne $E_i$ qui ne contient que des 0 sauf à la ligne $i$ où il y a un 1 puis utiliser la multilinéarité du déterminant. □

**Indications pour l'exercice 3.** Les formules de trigonométrie assurent que la famille est liée dès que $n \geqslant 3$.
Lorsque $n = 2$, on montre que le déterminant est égal à $-\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)$. □

**Indications pour l'exercice 4.** En développant par rapport à la première ligne puis par rapport à la première colonne, on obtient une relation de récurrence d'ordre 2 qu'il suffit ensuite de résoudre... □

**Indications pour l'exercice 5.**

**1.** On calcule le coefficient $[C_n W_n]_{i,j}$. En utilisant les propriétés des racines de l'unité, on obtient $\zeta_j^{i-1} P(\zeta_j)$ où $P(X) = \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell X^{\ell-1}$.

**2.** Les propriétés des déterminants de **Vandermonde** permettent d'obtenir $\det(C_n) = \prod_{k=1}^{n} P(\zeta_k)$.

**3.** Il importe d'utiliser les propriétés des racines de l'unité pour exprimer le réel $\Delta_n$ sous forme algébrique $\Delta_n = (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$. □

**Indications pour l'exercice 6.** On factorise la première colonne par 2 puis on effectue les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$. □

**Indications pour l'exercice 7.** En cherchant $M^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ {}^t\beta & \gamma \end{pmatrix}$, on obtient $\gamma = S^{-1}$ puis on trouve $\beta$ et $\alpha$. □

**Indications pour l'exercice 8.**

**1.** Introduire $A + iB$ et $A - iB$.

**2.** Chercher un contre-exemple avec des matrices d'ordre 2. □

## II. Applications

**Indications pour l'exercice 9.**

**1.** Penser aux fonctions polynomiales.

**2.** Construire des matrices à partir des familles de vecteurs. □

**Indications pour l'exercice 10.** On pourra passer par les endomorphismes canoniquement associés. □

**Indications pour l'exercice 11.** On pourra utiliser la formule du binôme de Newton puis la liberté de la famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$. On invoquera alors les déterminants de **Vandermonde**. □

**Indications pour l'exercice 12.** $(i) \Rightarrow (ii)$ On montre que $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ en raisonnant sur $E^*$ puis on utilise le théorème du rang.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ On montre que $\varphi$ transforme les bases en bases.
$(iii) \Rightarrow (i)$ On raisonne par contraposée en utilisant les propriétés du déterminant. □

**Indications pour l'exercice 13.** $(\Leftarrow)$ On construit une combinaison linéaire nulle des $(f_i)$ puis on l'évalue en $x_1, \dots, x_n$.
$(\Rightarrow)$ Raisonner par récurrence sur $n$. Lors de l'hérédité, on pourra considérer un déterminant dont la dernière colonne est $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ puis développer ce déterminant par rapport à sa dernière colonne en remarquant que le coefficient devant $f_n(x)$ est alors non nul. On utilisera alors la propriété d'indépendance. □