Probabilités sur des ensembles dénombrables

Chapitre VI

I. Ensembles dénombrables

Indications pour l'exercice 1.

1. Penser au théorème de la limite monotone.

2. Majorer les limites à gauche et à droite par le comportement en les points médians. Utiliser ensuite une somme télescopique.

3. Raisonner par l'absurde.

4. Utiliser une réunion dénombrable d'ensembles finis. □

Indications pour l'exercice 2. On pourra exprimer l'ensemble des nombres algébriques à l'aide de réunions d'ensembles des racines des polynômes de $I_{M,N} = \left\{ P \in \mathbb{R}_N[X] \; ; \; \sum_{k=0}^{N} |a_k| \leqslant M \right\}$. □

II. Dénombrement

Indications pour l'exercice 3. On pourra établir une bijection entre les murs à n briques et les éléments de $\{0,1\}^{n-1}$ où 0 et 1 représentent deux manières de poser une brique par rapport à la brique précédente. □

Indications pour l'exercice 4. Commencer par choisir Y, en précisant son cardinal, puis, à l'intérieur, dénombrer le nombre de choix pour X. On rencontre alors une formule du binôme.
On pourra réinterpréter le résultat final à l'aide d'un argument de dénombrement plus direct. □

Indications pour l'exercice 5. Constater que l'image d'une application strictement croissante sur un ensemble à p éléments est une partie à p éléments de l'ensemble d'arrivée. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Établir une bijection entre $\mathscr{A}_k$ et les fonctions d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à $n-1$ éléments.

2. Remarquer que le complémentaire de $\mathscr{S}_n$ est égal à l'union des $\mathscr{A}_k$. On applique ensuite la formule du crible ainsi que les propriétés des complémentaires. □

III. Probabilités

Indications pour l'exercice 7. On pourra noter P_1 (resp. P_2) le nombre de piles obtenus par le joueur 1 (resp. 2) et montrer que $4^n \mathbb{P}(P_1 = P_2) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. □

Indications pour l'exercice 8. On utilisera toujours la bijection entre les parties à 3 éléments et les applications strictement croissantes.
On constate ensuite que la probabilité recherchée est indépendante de la taille du paquet. □

Indications pour l'exercice 9. Utiliser le système complet d'événements $(\{|B| = k\}, 1 \leqslant k \leqslant n)$. □

Indications pour l'exercice 10. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $(\mathbb{P}(A_n))$ est une suite arithmético-géométrique. □

Indications pour l'exercice 11. Commencer par disposer les soucoupes en ligne avec les couleurs $RR\ BB\ NN$.
Compter combien il y a de façons de disposer les tasses dessus.
Ensuite, compter le nombre de façons de disposer les tasses dessus en évitant les mélanges. □

Indications pour l'exercice 12. Considérer des lancers consécutifs de deux pièces. Si les lancers sont identiques, recommencer ; sinon renvoyer la dernière valeur obtenue.
La terminaison et la loi obtenue pourront être démontrées en utilisant une loi géométrique. □

IV. Probabilités conditionnelles, Indépendance

Indications pour l'exercice 13. Dessiner un arbre. □

Indications pour l'exercice 14. On peut choisir $B = \{R \leqslant 3\}$ et $C = \{3 \leqslant R \leqslant 5\}$. □

Indications pour l'exercice 15.

1. Obtenir, à l'aide d'intégrations par parties, une formule de récurrence.

2. a) Utiliser le système complet dévénements $(U_i,\ 1 \leqslant i \leqslant p)$ où U_i est l'événement *l'urne i est choisie*.

b) Réutiliser le calcul précédent.

c) Penser aux sommes de Riemann et utiliser la question **1**. □

Indications pour l'exercice 16.

1. Penser à la formule des probabilités totales.
Pour la seconde relation, A_{n+3} est pas réalisé si B_n est réalisé et que les trois derniers tirages sont : échec / succès / échec.

2. Utiliser la relation précédente.

3. Utiliser la relation précédente. □

Indications pour l'exercice 17.

1. Montrer que $A_k = \{k \cdot j,\ k \in [\![1, p]\!]\}$ puis en déduire le cardinal de A_k.

2. En notant $J = \{k_1, \dots, k_r\}$ et $A_J = \bigcap_{j \in J} A_j$, décrire A_J en utilisant le lemme de Gauss.

3. Montrer que $A = \bigcap_{p \in \mathscr{P}_n} {}^c A_p$.

4. Déduire de la question précédente que $|B_d| = \varphi(n/n)$.

5. Montrer que $(B_d)_{d|n}$ forme un système complet d'événements. □

V. Avec Python

Indications pour l'exercice 18.

1. On pourra comparer `rd.random()` à $1/2^k$, ou utiliser la fonction `rd.binomial`.

2. On obtient une liste de listes qu'on construit à l'aide de deux boucles imbriquées.

3. En appelant une fois la fonction précédente, on obtient des simulations qu'on parcourt ensuite pour compter les nombres d'occurrences.

4. La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est un trinôme dont on détermine aisément les variations.

5.

□