■ ■ ■

I. Lois de variables aléatoires

Indications pour l'exercice 1.

1. Introduire le système complet d'événements $(\{N = 2n\})$.

2. Utiliser la définition de l'espérance qui permet d'obtenir une série numérique dont on peut calculer la somme à l'aide d'un produit de Cauchy. □

Indications pour l'exercice 2.

1. On cherche, parmi les tirages successifs, la position de la boule de la boule numéro 1. Il suffit ensuite de choisir l'ordre des boules de numéros pairs.

2. On choisit, parmi les tirages successifs, les positions des boules de numéros impairs. On choisit alors l'ordre des boules paires.

3. Déterminer $X(\Omega)$ puis la loi de X. Pour cela, chercher les positions des boules impaires sur $\{X = k\}$. □

Indications pour l'exercice 3. Déterminer $N(\Omega)$ puis distinguer les événements $\{N = 0\}$ et $\{N = k\}$. □

Indications pour l'exercice 4. Représenter le dépouillement par une suite d'entiers (S_n), où $S_n = S_{n-1} + 1$ si le n-ème bulletin dépouillé est en faveur de A et $S_n = S_{n-1} - 1$ sinon.
La probabilité recherchée est alors égale au nombre de chemins qui ne touchent pas l'axe des abscisses.
Or, pour compter les nombres de chemins qui rencontrent l'axe des abscisses on peut utiliser un argument de réflexion par rapport à l'axe des abscisses ainsi qu'un théorème des valeurs intermédiaires discret. □

II. Inégalités

Indications pour l'exercice 5. Pourquoi V admet-elle une variance ?
Remarquer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}\left(X - \frac{a+b}{2}\right)$ et que l'image de cette dernière variable aléatoire est inclus dans un intervalle symétrique autour de 0. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Montrer, en utilisant les propriétés des lois de probabilité, que la série converge absolument.

2. Raisonner avec la somme partielle de la série et montrer que, lorsque $|u| < 1$, alors $\left|\mathbb{P}(X > N)\, u^{N+1}\right| \to 0$. □

Indications pour l'exercice 7.

1. a) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) Utiliser une inclusion ensembliste.

2. a) Utiliser une inclusion ensembliste.

b) Utiliser l'inégalité de Markov à $(Z + x)^2$.

c) Étudier les variations de $x \mapsto \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$.

d) Utiliser la question précédente avec $Z = X - \lambda$.

3. a) Utiliser la série exponentielle.

b) Montrer que $\{X \geqslant a\} = \left\{e^{tX} \geqslant e^{ta}\right\}$ puis utiliser l'inégalité de Markox.

c) Choisir $a = 2\lambda$ et $t = 2$. □

Indications pour l'exercice 8.

1. On montre que $\mathscr{P}$ est borné par 1. La convexité s'obtient en utilisant la somme de séries convergentes.

2. Remarquer que chacune des sommes est un réel de $[0, 1]$.

3. Distinguer les cas $\{0, 1\} \subset A$, $0 \in A$ et $1 \notin A$,... En déduire la valeur de $d(P, Q)$.

4. Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

5. Inégalité triangulaire puis introduction progressive des bornes supérieures. □

Indications pour l'exercice 9. On remarque que $F(x) = F(\lambda^n x)$.
Si $\lambda > 0$, montrer que, si $x > 0$, alors $F(x) = 1$ et si $x < 0$, alors $F(x) = 0$. Conclure quant à la loi de X.
Si $\lambda \in]0, 1[$, effectuer un raisonnement analogue. □

III. Convergences

Indications pour l'exercice 10.

1. a) Utiliser l'indépendance des (X_n).

b) Penser à la formule de Taylor avec reste intégral.

c) Montrer que, pour n assez grand (indépendant de ω),

$$\left|(1+X_1)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+X_1)\right| \leqslant \frac{C\ln^2(1+X_1)}{n}$$

En déduire un encadrement sur $\mathbb{E}[Q_n]$ puis utiliser des développements limités pour conclure.

2. a) Penser au théorème des accroissements finis.

b) Introduire $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(1+X_k)$. Utiliser la question précédente puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

c) Passer à la limite dans la question précédente. □

Indications pour l'exercice 11. En utilisant l'inégalité triangulaire puis raisonnement ensembliste, commencer par montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - p_i)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Conclure en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. □

IV. Lois conjointes

Indications pour l'exercice 12.

1. Utiliser la définition de la loi géométrique.

2. Montrer que $\{Z = r\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \{X = ak, Y = bk\}$.

3. Utiliser l'indépendance. Pour $\mathbb{E}[1/Y]$, revenir à la définition de l'espérance. On pourra admettre dans un premier temps que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{k} = -\ln(1-q)$.

4. Utiliser une inégalité classique sur le logarithme népérien. □

Indications pour l'exercice 13.

1. Justifier qu'il s'agit d'une somme de lois de Bernoulli indépendantes.

2. Discuter, en utilisant le déterminant, en fonction des valeurs de $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$, l'inversibilité de Z.

3. Penser aux opérations élémentaires sur les lignes / colonnes.

4. Remarquer que $P^2 = P$ pour montrer la bijectficité de Φ.
Penser ensuite à justifier l'existence de f.
Enfin, pour mener le calcul, remarquer que

$$\sum_{A\in E} \det(A)\mathbb{P}(Z = A) = \sum_{A\in E} \det(AP)\mathbb{P}(Z = AP)$$

□

Indications pour l'exercice 14.

1. Majorer Y par une somme finie de variables aléatoires qui admettent une espérance.

2. Montrer que $1 = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{1}_{T=j}$. □

Indications pour l'exercice 15.

1. Penser en termes de nombre de succès d'une expérience de Bernoulli.

2. Utiliser le système complet d'événements $(\{N = m\})_{m\in\mathbb{N}}$. □

Indications pour l'exercice 16.

1. Modéliser par une expérience de Bernoulli.

2. La somme vaut N, le justifier ! Pour le calcul, les variables aléatoires ne sont pas indépendantes. On cherchera donc à calculer $\mathbb{E}\left[(X_1 + \cdots + X_n)^2\right]$ de deux manières différentes.
Les calculs de covariance et de corrélation sont alors immédiats.

3. Montrer que $Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$.

4. Remarquer que $\mathbb{E}[\beta_i\beta_j] = \mathbb{P}(\beta_i = \beta_j = 1)$.

5. Utiliser la formule permettant de calculer la variance d'une somme. □

Indications pour l'exercice 17.

1. a) On est en présence d'une somme de variables de Bernoulli indépendantes.

b) Penser à la loi faible des grands nombres.

c) Calculer $\mathbb{E}\left[X_k Y_I\right]$ en distinguant les cas $k \in I$ et $k \notin I$.

d) Développer $(X_1 + \cdots + X_n)^2$ en remarquant que $X_i^2 = X_i$. Ensuite, remarquer que $\mathbb{E}\left[S_n^3\right] = \mathbb{E}\left[S_n^2\right] + 2\mathbb{E}\left[S_n V_n\right]$. La loi de S_n est connue et l'espérance de $S_n V_n$ aussi !

2. a) On remarque que $Y_I(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Y_I suit une loi de Bernoulli dont il suffit de déterminer le paramètre.

b) Distinguer les cas où $I \cap J = \emptyset$, $I \cap J = \{k\}$ et $I \cap J = \{k, \ell\}$.

c) Calculer $\mathbb{V}(V_n)$ en remarquant qu'il n'y a pas d'indépendance puis utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

□

V. Avec Python