



I. Suites de fonctions

Indications pour l'exercice 1.

1. La convergence simple est aisée à obtenir. Une étude de $\|f\|_\infty$ permet ensuite de montrer la convergence uniforme.

2. La convergence simple est aisée à obtenir. Une étude de $\|f\|_\infty$ permet de montrer qu'il y a convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ si et seulement si $a > 3$. Par ailleurs, on montre qu'il y a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[b, +\infty[$ dès que $b > 0$.

3. La convergence simple est aisée à obtenir. Par une simple majoration, on montre ensuite la convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dès que $a > 0$.

L'étude de $(f(\pi/2n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ permet de montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ .

4. On montre qu'il y a convergence simple si et seulement si $x \leq 0$.

On montre la convergence uniforme sur $] -\infty, a]$ dès que $a < 0$.

L'étude de la continuité montre qu'il n'y a pas convergence uniforme sur \mathbb{R}_- .

5. On montre à l'aide de développements limités que $f_n(x) = \sin\left(\frac{2n\pi x}{8n^2\pi^2} + o(1/n^2)\right)$, ce qui assure la convergence simple.

En choisissant x_n judicieusement, on montre que $(f_n(x_n))$ est constante égale à 1 et que la convergence n'est donc pas uniforme sur \mathbb{R} .

En considérant $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on montre que $\|f_n\|_{\infty, [a, b]}$ converge vers 0 et donc la convergence uniforme sur tout segment de \mathbb{R} .

6. On montre aisément la convergence simple.

On montre ensuite l'encadrement $0 \leq e^{-x} - f_n(x) \leq e^{-x}(1 - e^{-x^2/2n})$ qui permet de montrer la convergence uniforme. \square

Indications pour l'exercice 2. La convergence simple est aisée.

L'étude de $(f_n(n\pi))$ permet de montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur \mathbb{R} . \square

Indications pour l'exercice 3.

1. En distinguant ce qui se passe en 0, on montre la convergence simple vers une fonction u .

2. Pour des raisons de régularité, ou par l'étude de $(u_n(1/\sqrt{n}))$, on montre qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur \mathbb{R} .

On montre la majoration $|u_n(x) - u(x)| \leq \frac{n+2}{n+1} e^{-na^2}$ pour montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$. \square

Indications pour l'exercice 4.

1. Il suffit d'appliquer les définitions.

2. On remarque que $1 + xy \leq 1 + |xy| \leq 1 + \max\{x, y\}^2$. On peut alors utiliser le fait que $1 + \min\{x, y\}^2 \geq 1$.

3. On majore $|g_n(x) - g(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$ en utilisant l'inégalité de la question précédente. \square

Indications pour l'exercice 5.

1. On montre que $d_{n+1} = 2d_n$.

2. On montre que $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)) \left[1 - \frac{\sqrt{x+P_n(x)}}{2}\right]$.

Ainsi, $P_n(x) \leq \sqrt{x}$ et $P_{n+1}(x) \geq P_n(x)$. On montre alors que $(P_n(x))$ est convergente vers \sqrt{x} .

3. On montre par récurrence que

$$0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \sqrt{x} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n \leq \frac{\sqrt{x}}{1 + n\frac{\sqrt{x}}{2}}$$

4. En majorant le dernier membre par $\frac{2}{n}$, on montre la convergence uniforme sur $[0, 1]$. \square

Indications pour l'exercice 6.

1. Penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange.

2. Utiliser la convergence simple et le fait que la somme soit finie.

3. Si $[a, b] \subset \mathbb{R}$, utiliser la norme infinie de L_k sur $[a, b]$. \square

Indications pour l'exercice 7.

1. Reconnaître une loi uniforme.
2. Montrer que $\{Z_n \leq x\} = \bigcap_{k=1}^n \{X_k \leq x\}$ puis utiliser l'indépendance des lancers.
3. Distinguer les cas $x < 6$ et $x \geq 6$ pour montrer la convergence simple. L'étude de $\|F_n - F\|_\infty$ permet de montrer la convergence uniforme (ne pas hésiter à recourir à une représentation graphique).
4. On montre que $F_{Y_n}(x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))^n$. Les convergences ont lieu comme dans la question précédente. \square

Indications pour l'exercice 8.

1. Calculer $|G'_n|$.
2. Appliquer l'inégalité des accroissements finis.
3. Utiliser la convergence uniforme établie grâce à la question précédente.
4. On montre que $|I_n(x) - x| \leq \frac{e}{n}$ ce qui permet de montrer la convergence uniforme sur $[0, 1]$. \square

Indications pour l'exercice 9.

1. a) Utiliser des intégrations par parties.
b) Utiliser une récurrence et des intégrations par parties.
c) Utiliser la question précédente et une récurrence.
2. a) Utiliser une récurrence en revenant à la définition de (f_n) .
b) Utiliser les théorèmes de croissances comparées pour montrer les convergences simple et uniforme sur tout segment.
3. Noter par l'absurde $\pi^2 = \frac{p}{q}$. On montre en utilisant les questions précédentes que $|\pi P_n(\pi^2)| \leq \frac{\pi^n}{2^n(n!)}$. Ensuite, $(q^{2n} p |P_n(\pi^2)|)$ est une suite d'entiers qui tend vers 0 donc est stationnaire. On obtiendrait alors $f_n(\pi) = 0$, ce qui est impossible. \square

Indications pour l'exercice 10.

1. Penser à l'espérance et aux lois binomiales.
2. Décomposer l'espérance en utilisant les indicatrices des événements $\{|S_n/n - x| < \delta\}$ et $\{|S_n/n - x| \geq \delta\}$. On utilise ensuite le caractère lipschitzien d'une part et la continuité de f en x d'autre part.
3. Penser à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. \square

II. Séries de fonctions

Indications pour l'exercice 11.

1. On montre que la série converge uniquement sur $]0, +\infty[$.
2. En utilisant la monotonie des fonctions, on montre la convergence normale sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ dès que $a > 0$.
3. On commence par montrer la décroissance de F . Le théorème de la double limite permet de montrer la limite de F en $+\infty$.
En 0, on montre que $F(x) \geq \sum_{k=0}^N \ln(1 + e^{-nx})$ puis on passe à la limite lorsque $x \rightarrow 0$. \square

Indications pour l'exercice 12.

1. La convergence normale permet de conclure.
2. Penser à la formule d'Euler puis à la linéarité de la somme des séries convergentes.
3. La convergence normale permet d'invertir somme et intégrale. \square

Indications pour l'exercice 13.

1. Si $x \leq 0$, utiliser la divergence grossière. Si $x > 0$, utiliser le théorème des séries alternées.
2. Utiliser les sommes partielles pour montrer que $F(x) = (1 - \frac{1}{2^{x-1}}) \zeta(x)$.
3. Utiliser une comparaison séries / intégrale.
4. Utiliser le théorème des séries alternées pour obtenir que $1 - 2^{-x} \leq F(x) \leq 1$. \square

Indications pour l'exercice 14.

1. Commencer par restreindre le domaine d'étude à $[-\pi/2, \pi/2]$. Montrer ensuite la convergence simple vers une fonction F en distinguant les cas $x \in \{-\pi/2, \pi/2\}$.
2. Montrer que F n'est pas continue et en déduire qu'il n'y a pas de convergence uniforme.

3. Une étude de maximum permet de montrer la convergence normale sur $[0, a]$ et sur $[-a, 0]$ dès que $-\pi/2 < a < \pi/2$.

4. Utiliser le reste des sommes géométriques pour montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. \square

Indications pour l'exercice 15.

1. La fonction est définie sur $] -1, +\infty[$. On prouve alors qu'il y a convergence simple en effectuant un développement limité.

2. En utilisant le théorème des séries alternées, on montre la convergence uniforme de $\sum f'_n$ puis le caractère \mathcal{C}^1 de f .

3. En écrivant $f(x) = -\ln(1+x) + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(1+x/n)$, on montre que la série converge uniformément sur $[-1, +\infty[$. On utilise alors le théorème de la double limite sur cette série pour montrer que $f(x) \sim_{-1+} -\ln(1+x)$.

4. En utilisant des sommes partielles et en montrant la convergence de suites d'intégrales, on montre que $f'(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$. \square

Indications pour l'exercice 16.

1. En discutant le signe de $a(n)$, on montre que le domaine de définition est \mathbb{R}_+^* et qu'il y a convergence normale sur tout segment de la forme $[a, +\infty[$ dès que $a > 0$.

2. Montrer que a est minorée par une valeur α et que $J = \{n \in \mathbb{N} ; a(n) = \alpha\}$ est fini. Utiliser ensuite le théorème de la double limite pour montrer ensuite que $f(t) \sim |J| e^{-\alpha t}$.

3. Comme $b > 0$, utiliser une technique de comparaison série / intégrale puis, en utilisant la convergence d'intégrales généralisées que

$$f(t) \sim_0 \frac{1}{bt^{1/b}} \int_0^{+\infty} u^{1/b-1} e^{-u} du$$

\square

Indications pour l'exercice 17.

1. Une majoration d'arctangente permet de montrer la convergence normale puis le caractère \mathcal{C}^1 de S .

2. On pourra remarquer que $t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^2}$ est décroissante puis utiliser une comparaison série / intégrale. \square

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 18.

1. Penser aux racines de l'unité pour montrer que $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On montre ensuite que $E = D$.

2.

3. On conjecture une convergence uniforme sur $] -\infty, a]$ et sur $[b, +\infty[$ pour tout $a < -1$ et $b > -1$.

L'étude des variations de f permet de montrer la convergence normale sur tout segment inclus dans $] -1, 1]$.

Pour $x > 1$, l'étude des variations de $f_n - f$ permet de montrer les convergences uniformes sur $[a, +\infty[$. \square