Espaces vectoriels normés de dimension finie

Chapitre X

■ ■ ■

I. Normes

Indications pour l'exercice 1. Obtenir une région délimitée par 4 segments. □

Indications pour l'exercice 2.

1. Pour l'égalité, étudier les variations de la fonction $t \mapsto x + ty$.
Pour montrer que N est une norme, on pourra utiliser l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$.

2. Pour déterminer $\alpha > 0$ tel que $N(u) \leqslant \alpha \|u\|$, montrer que $x^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$ puis que $(x + y)^2 \leqslant 2(x^2 + y^2)$. Déterminer ensuite un point en lequel ces deux inégalités sont atteintes.

Pour déterminer $\beta > 0$ tel que $\|u\| \leqslant \beta N(u)$, montrer que $x^2 + y^2 \leqslant N(u)^2 + 2N(u)(|x + y| + |x|)$. Déterminer ensuite un point en lequel cette inégalité est atteinte. □

Indications pour l'exercice 3. Commencer par montrer que N est bien définie.
Pour l'inégalité triangulaire, utiliser l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ puis passer à la borne supérieure avec précaution. □

Indications pour l'exercice 4.

1. Montrer que N est une norme euclidienne.

2. Utiliser le théorème fondamental du calcul différentiel puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On pourra montrer au passage que $|a + b| \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

3. Considérer la suite de fonctions $f_n : x \mapsto x^n$. □

Indications pour l'exercice 5. Raisonner par l'absurde en considérant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Remarquer que le résultat est trivial si $x = y$. Sinon, remarquer que $\frac{1}{\|x-y\|} \cdot (x - y)$ appartient à la boule unité.

2. Utiliser la caractérisation des bornes supérieures.

3. La première question permet d'obtenir une inégalité.
Pour l'autre inégalité, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $d(x, H) \leqslant \frac{|f(x)|}{\|f\|-\varepsilon}$. □

II. Topologie générale

Indications pour l'exercice 7.

1. Montrer que 1 appartient à l'adhérence de l'ensemble.

2. Montrer que -1 appartient à l'adhérence de l'ensemble.

3. Montrer que 0 appartient à l'adhérence de l'ensemble. □

Indications pour l'exercice 8.

1. Considérer $x \in \overline{A \cap B}$ puis utiliser la caractérisation séquentielle des éléments de l'adhérence.
Pour le contre-exemple, on pourra considérer $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$.

2. Pour l'inclusion directe, considérer $x \in \overline{A \cup B}$ puis utiliser la caractérisation séquentielle des éléments de l'adhérence.
Pour l'inclusion réciproque, on pourra montrer que, si $x \in \overline{A \cup B}$ et $x_n \to x$, en considérant les ensembles $I = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ x_n \in A\}$ et $J = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ x_n \in B\}$, l'un de ces ensembles est infini. □

Indications pour l'exercice 9. Utiliser la continuité du produit matriciel. □

Indications pour l'exercice 10. Considérer les suites $\left({}^t(A^{2k})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left({}^t(A^{2k+1})\right)_{k\in\mathbb{N}}$ puis utiliser la continuité de la transposée. □

Indications pour l'exercice 11.

1. Classique, repose sur les identités remarquables.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des séries convergentes.

3. Vérifier que φ est bien définie à l'aide de la question **1.** puis les propriétés des produits scalaires.

4. Écrire la définition de $\|g((x_n)) - g((y_n))\|$ puis réorganiser les termes et utiliser l'inégalité triangulaire de la norme précédente. $\square$

Indications pour l'exercice 12.

1. Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.

2. Étudier $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

3. Considérer $x_n = (\sqrt{2} - 1)^n$. $\square$

Indications pour l'exercice 13.

1. Montrer la contraposée, i.e. $d(x, F) = 0$ si et seulement si $x \in F$. On pourra montrer la continuité de $d(\cdot, F)$ (qui est lipschitzienne) et utiliser la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

2. Remarquer que, si Ω est ouvert, alors $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{x \in E\ ;\ d(x, \complement\Omega) \geqslant 1/k\}$. $\square$

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 14.

1. Il s'agit de vérifier l'inégalité pour chacune des lignes.

2. Penser à une rotation d'angle $\pi/4$.

3. Trouver un contre-exemple en introduisant par exemple une rotation d'angle $\pi/8$.

4. Écrire la ligne i_0 de la relation $MX = 0$ où i_0 est tel que $\|X\|_\infty = |x_{i_0}|$. Obtenir ensuite une contradiction.

5. Modifier légèrement le programme de la question **1.**

6. Écrire DSP comme ligne de niveau d'une fonction continue. $\square$