



I. Produits scalaires, Familles de vecteurs

Indications pour l'exercice 1.

1. Utiliser le nombre de racines des polynômes de degré inférieur à n .
2. Implémenter l'algorithme de Gram-Schmidt.

Indications pour l'exercice 2.

1. Utiliser l'inversibilité de f pour montrer que la famille est une base. Pour l'orthogonalité, utiliser les hypothèses.
2. Utiliser la bilinéarité du produit scalaire ainsi que les propriétés de f .

Indications pour l'exercice 3.

1. Montrer, en utilisant les normes, que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = 0.$$

2. On pourra faire intervenir la taille des familles libres.
3. Extraire une base de F et une base de G . Compléter ensuite ces bases par des familles orthonormées. Définir ensuite f sur chacun des éléments de cette base.

Indications pour l'exercice 4. Penser bilinéarité du produit scalaire et inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indications pour l'exercice 5.

1. Montrer que (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre en calculant $\left\| \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i \right\|$ en distinguant les termes en fonction du signe de λ_i .
2. Choisir x_1 et x_2 .

3. En notant $I = \{i ; \lambda_i < 0\}$, commencer par montrer que $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. En déduire que $I = \emptyset$.

Indications pour l'exercice 6.

1. Commencer par vérifier que l'intégrale est convergente.
2. Penser au théorème de représentation des formes linéaires.
3. Supposer par l'absurde que P_n possède r ($< n$) racines distinctes en lesquelles il change de signe dans $[-1, 1]$ et exhiber un polynôme Q tel que $Q(1) = 0$ et PQ est de signe constant sur $[-1, 1]$.

Indications pour l'exercice 7. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz en distinguant les cas où $X \in \text{Ker}({}^tA)$.

Indications pour l'exercice 8.

1. a) Question de cours.
b) Question de cours sur l'identité de polarisation.
c) Déterminer un contre-exemple à l'identité du parallélogramme.
2. a) Utiliser l'identité du parallélogramme.
b) Utiliser l'homogénéité de N puis l'identité du parallélogramme.
c) Montrer la propriété pour $t \in \mathbb{N}$ puis pour $t \in \mathbb{Z}$ puis pour $t \in \mathbb{Q}$ et enfin pour $t \in \mathbb{R}$.
d) Montrer les propriétés du produit scalaire.

Indications pour l'exercice 9.

1. Pour le sens direct, on pourra s'attacher à montrer la contraposée en remarquant que, en décomposant les x_i dans une base orthonormée, $G = A^tA$. Pour la réciproque, on utilise que le déterminant est une forme alternée.
2. Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes / colonnes.
3. Utiliser la définition du projecteur orthogonal, les questions précédentes, puis un développement selon les lignes / colonnes.

Indications pour l'exercice 10.

1. Penser au théorème de représentation des formes linéaires.

2. Effectuer des calculs par blocs.
3. On peut interpréter B comme une matrice de changement de base.
4. Montrer que $Q^{-1}BP^{-1}$ est inversible et appartient à H . \square

Indications pour l'exercice 11.

1. On pourra écrire les premiers termes avant d'en déduire l'expression générale.
2. Utiliser que tC n'est pas inversible. Montrer ensuite que, si le système est contrôlable, alors ${}^tXX = 0$ soit $X = 0$.
3. Utiliser l'orthogonal de $\text{Im } F$.
4. Choisir judicieusement les (U_0, \dots, U_{N-1}) . \square

II. Projections

Indications pour l'exercice 12. Montrer que, si $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$ et $f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_4)$, alors (f_1, f_2) est une base orthonormée de F . En déduire la matrice de p dans la base canonique. Exprimer ensuite la distance en fonction du projeté orthogonal. \square

Indications pour l'exercice 13.

1. Pour le caractère défini positif, penser à utiliser l'ordre de multiplicité des racines.
2. **a)** Penser aux noyaux des formes linéaires.
 - b)** Remarquer que $P \in E$ si et seulement si $P \in \text{Vect} \{1\}^\perp$. En déduire une expression de $d(1, E)$ en fonction de la norme de 1. \square

Indications pour l'exercice 14.

1. Commencer par montrer que le produit scalaire est bien défini. Utiliser le nombre de racines de P pour montrer que le produit scalaire est bien défini positif.
2. On note $Q = aX + b$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$ puis on utilise les équations $\langle X^2 - Q, 1 \rangle = 0$ et $\langle X^2 - Q, X \rangle = 0$. \square

Indications pour l'exercice 15. En effectuant une intégration par parties, on peut montrer que F est un hyperplan.

En remarquant que $F = \text{Vect} \{X\}^\perp$, la distance est celle à un hyperplan. \square

Indications pour l'exercice 16.

1. On montrera que la C.N.S. est que les a_0, \dots, a_n soient deux à deux distincts.
2. On remarque que F est un hyperplan et que $F = \text{Vect} \{1\}^\perp$. La distance recherchée est donc la distance à un hyperplan. \square

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 17.

1. **a)** On peut utiliser le type `array`.
 - b)** Utiliser une boucle.
 - c)** Pour montrer le résultat, on pourra écrire les produits matriciels.
2. **a)** Penser à la symétrie.
 - b)** On a obtenu précédemment un polynôme annulateur. Le rang de M permet de déterminer la dimension du noyau. On exhibe ensuite des bases.
 - c)** On peut vérifier que les sous-espaces propres sont orthogonaux ou utiliser la symétrie.
 - d)** On exprimera la projection en utilisant une base orthonormée obtenue aux questions précédentes. \square