Endomorphismes euclidiens

Chapitre XIV

■ ■ ■

I. Réduction des matrices symétriques

Indications pour l'exercice 1. La diagonalisabilité est simple à établir.
Commencer ensuite par déterminer la dimension puis une base de $\text{Ker}(A - I_n)$.
La trace et le déterminant permettent de déterminer les deux valeurs propres restantes avec leurs sous-espaces propres associés. □

Indications pour l'exercice 2. La diagonalisabilité est simple à obtenir.
Pour obtenir les racines du polynôme caractéristique de M, on pourra calculer $\chi_M(a + 2b\cos(\theta))$. □

Indications pour l'exercice 3. Justifier que les valeurs propres peuvent être notées $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

1. Étudier $f(tX_1)$.

2. Étudier $f(tY)$ pour $Y = \sqrt{-\lambda_1}X_n + \sqrt{\lambda_n}X_1$.

3. Si $X = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i X_i$, faire apparaître $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2 - \frac{\lambda}{2}\right)^2$ puis montrer que la valeur maximale est atteinte pour un vecteur colinéaire à X_n.d □

Indications pour l'exercice 4.

1. Utiliser la symétrie de B puis écrire $B = DAD$.

2. On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité arithmético-géométrique.

3. Montrer que $\det(B) \leqslant 1$ en utilisant la question précédente puis conclure. □

Indications pour l'exercice 5.

1. Diagonaliser A dans une base orthonormée et montrer en utilisant la matrice C que, si $X \neq 0$, alors ${}^tXAX \neq 0$.

2. Montrer que $J(X + X_0) - J(X_0) > 0$. □

Indications pour l'exercice 6.

1. Calculer $f(u)$ et $f(v)$.

2. Déterminer la restriction de f à $P^\perp$ puis la matrice de la restriction de f à P. □

II. Endomorphismes orthogonaux

Indications pour l'exercice 7.

1. On peut utiliser le déterminant.

2. B est symétrique réelle.

3. Pour 0, utiliser la non inversibilité.
Pour la positivité des racines, calculer ${}^tXBX$ où X est un vecteur propre de A.

4. On peut utiliser la non-inversibilité.

5. Remarquer que B est un polynôme en A.

6. On pourra utiliser que $\text{Sp}(A) = \text{Sp}({}^tA)$. □

Indications pour l'exercice 8. Pn pourra écrire la matrice de $f = p + q - 2p \circ q$ dans une base de $\mathbb{R}^2$ bien choisie. On montrera alors que cette matrice est le produit d'une matrice scalaire et d'une matrice de rotation. □

Indications pour l'exercice 9. On distinguera les cas où g est une rotation ou une réflexion.
On pourra alors distinguer des sous-cas en fonction de la parité de n. □

Indications pour l'exercice 10. On commencera par exploiter la relation $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$ en montrant qu'il y a un unique terme qui est non nul.
On s'attachera ensuite à montrer que le cardinal vaut $2^n \cdot n!$. □

Indications pour l'exercice 11. Commencer par comparer $E_1(f)$ et $E_1(g)$. □

Indications pour l'exercice 12. Remarquer que ces matrices sont diagonalisables. Préciser la formule de changement de bases ainsi que les valeurs propres. □

Indications pour l'exercice 13.

1. On pourra faire intervenir le produit mixte.

2. On pourra calculer f^3. On cherchera ensuite les valeurs propres réelles possibles pour f.

3. On pourra considérer les matrices de ces endomorphismes dans une base orthonormée adaptée... $\square$

Indications pour l'exercice 14.

1. Travailler avec les matrices de P et Q dans une base orthonormée et justifier que $PQ = {}^t(PQ)$.

2. On pourra réduire P et Q dans une base commune. $\square$

Indications pour l'exercice 15.

1. Le sens direct est simple.
Pour la réciproque, on remarque que M et S ont même spectre. On les orthodiagonalise alors avec une même matrice diagonale D puis on choisit convenablement Ω.

2. En décomposant $D = \operatorname{Diag}\left(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_p I_{n_p}\right)$ par blocs, on montrera que les matrices Ω ont des blocs diagonaux formés de matrices orthogonales. $\square$

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 16.

1. Utiliser la norme canonique puis les fonctions `transpose` et `trace` de `numpy`.

2. Raisonner par double implication.

3. a) On crée une liste de liste.

b) Utiliser la syntaxe précédente avec des -1 et des 1.

c) On peut tester l'égalité de deux matrices avec `array_equal` du module `numpy`.

4. On obtient un ensemble à 3 éléments.
On peut remarquer que, si $A \in SH_4$, alors $\frac{1}{2}A$ est une symétrie orthogonale donc on pourra étudier le spectre. $\square$