



I. Fonctions à valeurs vectorielles

Indications pour l'exercice 1.

1. Utiliser la formule de dérivation d'un produit, puis la linéarité de la transposée et enfin l'antisymétrie de A .

2. Utiliser la condition initiale ainsi que la question précédente.

Indications pour l'exercice 2. Commencer par dériver la relation $t\Omega = I_{2p+1}$.

Appliquer le déterminant à la relation ainsi obtenue.

Indications pour l'exercice 3. On pose $\varphi : t \mapsto \|f(t)\|$.

Commencer par montrer que $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ admet une limite en 0.

Montrer que f est non nulle sur un voisinage de 0.

Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 sur ce voisinage.

En déduire que φ est strictement croissante sur un voisinage de 0.

II. Points particuliers

Indications pour l'exercice 4. Montrer que si $u \neq v$ sont les paramètres du point double, alors ils sont racines du trinôme $X^2 - X - 1$.

Calculer des vecteurs directeurs des tangentes en ces points pour montrer qu'elles sont orthogonales.

Indications pour l'exercice 5. L'étude des dérivées montre que seul le point de paramètre 2 est singulier.

Les développements limités de x et de y en 2 permettent d'étudier ce point.

Indications pour l'exercice 6. Les branches infinies sont obtenues lorsque t tend vers 0 ou -1 . On obtient des droites asymptotes.

Les études de x' et y' permettent de montrer que seul le point de paramètre 2 est singulier. Des développements limités de x et de y en 2 permettent d'obtenir la nature de ce point.

On pourra également repérer les points où les tangentes sont horizontales / verticales.

Indications pour l'exercice 7. L'intervalle d'étude peut être réduit à $[0, \pi]$. Il y a un unique point singulier dont le type peut être obtenu par symétries.

III. Avec Python

Indications pour l'exercice 8.

1. Le domaine d'étude peut être ramené à $[0, \pi]$.

2. Il n'y a pas de point singulier.

3. Le calcul de (x', y') permet d'obtenir un vecteur tangent à l'origine. En $t = \pi$, on peut utiliser le théorème de prolongement dérivable pour justifier l'existence et calculer $x'(\pi)$.

4. La valeur exacte peut être calculée avec la fonction `quad` du module `scipy.integrate`.

Indications pour l'exercice 9.

1. Le domaine d'étude peut être ramené à $] -1, 1]$.

Lorsque t tend vers -1 , on obtient une droite asymptotique dont on déterminera une équation cartésienne.

2. On commence par déterminer les paramètres du point double. La longueur de la courbe est obtenue à l'aide de la fonction `quad` du module `scipy.integrate`.

3. On pourra calculer $f^3 + g^3$.

4. Remarquer que les points de paramètres t_1, t_2 et t_3 sont alignés si et seulement s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{pmatrix} f(t_1) & g(t_1) & 1 \\ f(t_2) & g(t_2) & 1 \\ f(t_3) & g(t_3) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis exprimer cette condition à l'aide d'un déterminant.