I. Régularité

Indications pour l'exercice 1. On pourra commencer par utiliser une inégalité classique sur le produit x^3y^3 pour montrer la continuité de f (ce point est cependant théoriquement inutile).
Le caractère $\mathscr{C}^1$ s'obtient en montrant que les dérivées partielles de f sont continues en $(0,0)$. $\square$

Indications pour l'exercice 2. La majoration de f pour montrer sa continuité peut s'effectuer à l'aide de la norme infinie de (x,y).

Les calculs des dérivées partielles doivent être effectués séparément en $(0,0)$.

L'étude des dérivées partielles suivant la première bissectrice permettent de prouver qu'elles ne sont pas continues en $(0,0)$.

La dérivée partielle seconde se calcule différemment en $(0,0)$. $\square$

II. Recherche d'extrema

Indications pour l'exercice 3. Commencer par rechercher les points critiques.
Étudier le signe de $f(7/3+h,-2/3+k)-f(7/3,-2/3)$ en faisant apparaître des carrés parfaits. $\square$

Indications pour l'exercice 4.

1. Les points critiques sont les points de l'axe des abscisses.

Si $x \neq 0$, l'étude de $t \mapsto f(x,t)$ sur un voisinage de 0 permet de montrer que f n'admet pas d'extremum local en ce point.

Si $x = 0$, l'étude de $t \mapsto f(\sqrt[5]{t},t)$ permet de montrer qu'il n'y a pas d'extremum local en ce point.

2. L'étude peut ensuite être limitée au cas $x \geqslant 0$. On décompose ensuite l'étude sur $x=1$, $y=1$ et $y=-1$. $\square$

Indications pour l'exercice 5.

1. Utiliser le théorème spectral.

2. Écrire ∇f sous forme matricielle à l'aide des matrices A et U.

3. La recherche des points critiques se ramène à une résolution de système linéaire qui dont l'ensemble des solutions dépend du rang de la matrice A.

4. Reprendre la stratégie de la question précédente.

5. Exprimer $f(z+h)-f(z)$ à l'aide de la fonction φ.

6. Étudier les valeurs de f selon $\mathrm{Vect}\{y_0\}$ où y_0 est un vecteur propre de φ. $\square$

III. Autour des dérivées partielles

Indications pour l'exercice 6.

1. Utiliser les théorèmes généraux.

2. Utiliser la règle de la chaîne.

3. Reprendre la stratégie de la question précédente.

4. Utiliser le résultat de la question précédente.

5. L'équation différentielle obtenue est d'ordre 1 pour f'. On en déduit donc, à l'aide de deux paramètres, la fonction f. On identifie ensuite ces deux paramètres à l'aide des conditions initiales. $\square$

Indications pour l'exercice 7.

1. Utiliser un théorème de comparaison.

2. On pourra montrer la convergence normale de la série puis utiliser les théorèmes généraux.

3. On pourra appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme mais en travaillant sur des segments.

4. Utiliser le résultat du calcul de la question précédente. On peut alors étudier les lignes de niveaux de la fonction.

5. Penser au théorème des bornes. $\square$

Indications pour l'exercice 8. On pose $g : (u, v) \mapsto f(u, v\,\mathrm{e}^{-u^2/2})$ puis on calcule $\partial_1 g$. On introduit une fonction h dont on montrera la régularité, puis on reviendra sur la fonction f. □

Indications pour l'exercice 9.

1. On pourra appliquer la règle de la chaîne en dérivant par rapport à t puis évaluer en $t = 1$.

2. On pourra appliquer la règle de la chaîne et la question précédente.

3. On pourra résoudre l'équation différentielle puis utiliser les formules de factorisation des fonctions trigonométriques.

4. Effectuer la réciproque à la question précédente en obtenant des conditions sur les coefficients des polynômes. □

Indications pour l'exercice 10.

1. On pourra utiliser les théorèmes généraux.

2. On pourra utiliser la règle de la chaîne.

3. On retrouve ici l'expression du laplacien en coordonnées polaires.

4. a) Penser au théorème de dérivation sous le signe intégral, en vérifiant chacune des hypothèses.

b) Commencer par exprimer m' en fonction de m'' et en déduire une valeur de m.
Utiliser le caractère borné de m pour en déduire que m est constante. La valeur s'obtient par interversion limite / intégrale. □

IV. Courbes et Surfaces

Indications pour l'exercice 11. Écrire les équations du plan tangent en (x_0, y_0, z_0) puis, en supposant qu'il contient les droites, obtenir les valeurs possibles. □

V. Avec Python

Indications pour l'exercice 12.

1. Appliquer les définitions.

2. L'angle peut être calculé à l'aide du produit scalaire.

3. Le calcul exact peut être effectué à l'aide de la forme intégrale.

4. □