Formulaire

■ ■ ■

Partie I : La trigonométrie circulaire

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$

Pour tout x réel,	
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

Pour tous x, a, b, p, q réels,	
Théorème de **Pythagore**	$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
Formules d'addition	$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$ $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
Formules de duplication	$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
Formules de factorisation	$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$ $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
Passage à l'**angle moitié** $t = \tan\frac{x}{2}$	$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$
Formules d'EULER	$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Partie II : Les calculs de primitives

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
x^α, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_- \setminus \{-1\}$, $\mathbb{R}_+^\star$ si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\ln\lvert x\rvert$	$x \ln\lvert x\rvert - x$	$\mathbb{R}_+^\star$ ou $\mathbb{R}_-^\star$
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln \cosh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln\lvert\tan\frac{x}{2}\rvert$	$]k\pi, \pi+k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos x}$	$\ln\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$

Partie III : Formules combinatoires

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ ou $(a,b) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ telles que $ab = ba$.

Binôme de NEWTON.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Formule de BERNOULLI.

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Partie IV : La formule de TAYLOR avec reste intégral

Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ et $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie V : La formule de STIRLING

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Partie VI : Le déterminant de VANDERMONDE

Soient $n \geqslant 2$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Alors,

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Partie VII : Les relations de comparaison en 0

Les équivalents classiques sont obtenus en prenant le premier terme non nul des développements limités. Les relations de comparaison sont écrites pour $x \to 0$.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)
\end{aligned}$$

Partie VIII : Les séries entières

Les séries entières sont présentées avec leur rayon de convergence ρ. Lorsque le paramètre est x, on se limite aux paramètres réels.
Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{e}^z & = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} & , \rho = +\infty \\
\sin(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , \rho = +\infty \\
\cos(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , \rho = +\infty \\
\sinh(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} & , \rho = +\infty \\
\cosh(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , \rho = +\infty \\
\frac{1}{1-z} & = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n & , \rho = 1 \\
\ln(1+x) & = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} & , \rho = 1 \\
(1+x)^\alpha & = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n & , \rho = 1 \\
\arctan(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} & , \rho = 1 \\
\arcsin(x) & = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1} & , \rho = 1.
\end{array}$$

Partie IX : Les lois de probabilités classiques

En notant $q = 1 - p$.

Nom	Paramètres	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}[X]$	$\mathbb{V}(X)$	G_X	ρ
Constante	c	$\{c\}$	1	c	0	t^c $(c \in \mathbb{N})$	$+\infty$
Uniforme	$a < b$ entiers	$[\![a, b]\!]$	$\frac{1}{b-a+1}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	$\frac{t^a - t^{b+1}}{(b-a+1)(1-t)}$	$+\infty$
Bernoulli	$p \in]0, 1[$	$\{0, 1\}$	p $(k = 1)$	p	$p\,q$	$q + p\,t$	$+\infty$
Binomiale	$(n, p) \in \mathbb{N} \times]0, 1[$	$[\![0, n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	$n\,p$	$n\,p\,q$	$(q + p\,t)^n$	$+\infty$
Géométrique	$p \in]0, 1[$	$\mathbb{N}^*$	$p\,q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{p\,t}{1-q\,t}$	$\frac{1}{q}$
Poisson	$\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$	$\mathbb{N}$	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$+\infty$

Partie X : Notes personnelles