Sommabilité et Commutativité

■ ■ ■

Théorème de réordonnancement

Soit σ une bijection sur $\mathbb{N}$ et (a_n) une suite de scalaires absolument convergente. Alors, $\sum a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

1. Cas $a_n \geqslant 0$. On note $N_n = \max \sigma([\![0,n]\!])$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)} \leqslant \sum_{k=0}^{N_n} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

Aunsi $\sum a_{\sigma(k)}$ converge et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_{\sigma(k)} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$. En appliquant ce dernier résultat avec la série $(a_{\sigma(k)})$ et la bijection σ^{-1}, on obtient l'autre inégalité puis l'égalité.

2. Si $a_n \in \mathbb{R}$, on décompose $a_n = a_n^+ + a_n^-$.

3. Si $a_n \in \mathbb{C}$, on décompose $a_n = \mathscr{Re}\,(a_n) + \mathscr{Im}\,(a_n)$.

Sommation par paquets

Soient I un ensemble dénombrable et $(a_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$. La famille (a_i) est **sommable** si $\left\{\sum\limits_{j\in J} a_j,\ J \subset I \text{ fini}\right\}$ est majoré. La borne supérieure de cet ensemble sera notée $\sum\limits_{i\in I} a_i$. On suppose que $I = \bigsqcup\limits_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$. Si (a_i) est sommable, alors, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\sum\limits_{i\in I_\lambda} a_i$ converge et

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda} a_i\right)$$

On remarque que, si (a_n) est absolument convergente, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

4. Le caractère convergeant de $\sum\limits_{i\in I_\lambda} a_i$ s'obtient par croissance et majoration.

5. Soit $\Gamma \subset \Lambda$ fini. Alors,

$$\sum_{\lambda\in\Gamma}\left(\underbrace{\sum_{i\in I_\lambda} a_i}_{\sigma_\lambda}\right) \leqslant \sum_{i\in I} a_i$$

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda \leqslant \sum_{i\in I} a_i$$

6. Soit $J \subset I$ fini et $\{\lambda \in \Lambda\ ;\ J \cap I_\lambda \neq \emptyset\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Alors,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J} a_i &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \sigma_{\lambda_i}\\ &\leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda\end{aligned}$$

$$\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \sigma_\lambda$$