Théorème de FUBINI pour l'inversion des sommations

■ ■ ■

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^2}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on suppose que $\sum |a_{i,j}|$ converge et on note $b_i = \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i,j}|$. Montrons le théorème de FUBINI qui assure que, si $\sum b_j$ converge, alors

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\right)$$

On note, pour tout $i \in \mathbb{N}$, et $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} f_i(0) &= \sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j} \\ f_i(x) &= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \text{ si } x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ g(x) &= \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(x), \ \forall\, x \in]0,1] \end{cases}$$

1. D'une part, d'après les hypothèses, f est continue en 0.

2. D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in]0,1]$,

$$\begin{aligned} |f_i(x)| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i,j}| \\ &\leqslant b_i \end{aligned}$$

Cette inégalité reste valable en 0 et $\|f_i\|_\infty \leqslant b_i$.
Ainsi, comme $\sum b_i$ converge, alors $\sum f_i$ converge normalement sur $[0,1]$ et g est continue sur $[0,1]$.

3. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}| &\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} |a_{i,j}| \end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_i a_{i,j}$ converge absolument, donc converge.

4. Alors,

$$\begin{aligned} g(0) &= \sum_{i=1}^{+\infty} f_i(0) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{i,j}\right), \quad \text{par définition de } f_i(0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} g(1/n) \end{aligned}$$

car g est continue en 0. Or,

$$\begin{aligned} g(1/n) = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} f_i(1/n)\right) &= \left(\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j}\right), \quad \text{par stabilité par addition des séries convergentes} \\ &\to \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty} a_{i,j} \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat attendu.

Mathématiciens

FUBINI Guido (19 jan. 1879 à Venise-6 juin 1943 à New York).