■ ■ ■

## Cadre de travail

■ $I$ désigne le segment $[a, b]$ et $t_0 \in I$.
■ $\|\cdot\|$ désigne une norme sur $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $|||\cdot|||$ sa norme subordonnée. On rappelle que $|||A||| = \sup\limits_{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}} \|AX\|$. Alors,

$$\forall\, X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ \|AX\| \leqslant |||A||| \cdot \|X\|$$

■ Les fonctions $t \mapsto \|A(t)\|$ et $t \mapsto \|B(t)\|$ sont supposées sur le segment $I$. Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, t \in I,\ |||A(t)||| \leqslant \alpha \text{ et } \|B(t)\| \leqslant \beta$$

■ Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $I$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $f : I \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

∗ $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $I$ si

$$\forall\, t \in I,\ \lim_{n \to +\infty} f_n(t) = f(t)$$

∗ $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $I$ si

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{t \in I} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$$

∗ $\sum f_n$ converge normalement sur $I$ si $\sum \sup\limits_{t \in I} \|f_n(t) - f(t)\|$ converge.

Comme dans le cadre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, la convergence normale implique la convergence uniforme qui implique la convergence simple.
De plus, les théorèmes de régularité des limites sont encore valides.

■ Si $X : I \to \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_p(t) \end{pmatrix}$ est une fonction continue, on définit son intégrale comme une intégration composante à composante.

$$\forall\, t \in I,\ \int_{t_0}^{t} X(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{t_0}^{t} X_1(s)\,\mathrm{d}s \\ \vdots \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} X_p(s)\,\mathrm{d}s \end{pmatrix}$$

L'intégrale satisfait l'inégalité triangulaire

$$\forall\, t \in I,\ \left\| \int_{t_0}^{t} X(s)\,\mathrm{d}s \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|X(s)\|\ \mathrm{d}s \right|$$

■ $X$ est une solution de classe $\mathscr{C}^1$ de $X' = AX$ sur $I$ si et seulement si

$$\forall\, t \in I,\ X(t) = \int_{t_0}^{t} (A(s)X(s) + B(s))\ \mathrm{d}s$$

## Préliminaire

Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $I$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in I,\ Y_{n+1} = \int_{t_0}^{t} A(s)Y_n(s)\,\mathrm{d}s$$

**1.** Comme les fonctions $A$ et $Y_0$ sont continues sur un segment, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, t \in I,\ |||A(t)||| \leqslant \alpha \text{ et } \|Y(t)\| \leqslant \beta$$

**2. Majoration de $Y_n$.** On montre par récurrence que $\|Y_n(t)\| \leqslant \beta \frac{\alpha^n |t - t_0|^n}{n!}$.
**Initialisation.** L'inégalité à l'ordre 0 est triviale.

**Hérédité.** Soit $n > 1$.

$$\begin{aligned}
\|Y_{n+1}(t)\| &\leqslant \int_{t_0}^{t} \|A(s)Y_n(s)\| \, \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} |||A(s)||| \, \|Y_n(s)\| \, \mathrm{d}s \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \alpha\beta \frac{\alpha^{n-1} |s-t_0|^{n-1}}{(n-1)!} \\
&\leqslant \beta \frac{\alpha^n |t-t_0|^n}{n!}
\end{aligned}$$

**3. Convergence de $\sum Y_n$.** D'après la question précédente,

$$\sup_{t\in[a,b]} \|Y_n(t)\| \leqslant \beta \frac{\alpha^n (b-a)^n}{n!}$$

Ainsi, $\sum Y_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

### Existence d'une solution au problème de Cauchy

Soit $\widetilde{X}_0 \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On définit par récurrence la suite de fonctions $(X_n)$ par

$$\forall\, t \in I,\ \begin{cases} X_0(t) &= \widetilde{X}_0 \\ X_{n+1} &= \widetilde{X}_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(s)X_n(s) + B(s)] \, \mathrm{d}s \end{cases}$$

**4. Contrôle des accroissements.** En posant $Y_n = X_{n+1} - X_n$, alors

$$Y_{n+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)(X_{n+1}(s) - X_n(s)) \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} A(s)Y_n(s) \, \mathrm{d}s$$

Ainsi, d'après la question précédente, $\sum Y_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

**5. Modes de congergence.** D'après le point précédent,

* D'une part, $\sum Y_n = \sum(X_{n+1} - X_n)$ converge simplement sur $[a, b]$ et $(X_n)$ converge simplement vers une fonction notée $X_\infty$.
* D'autre part, $X_\infty(t) - X_n(t) = \sum_{k=n}^{+\infty} (X_{k+1} - X_k)$. Ainsi, $(X_n)$ converge uniformément vers $X_\infty$.

**6. Conclusion.**
Comme, pour tout $n$ entier naturel la fonction $X_n$ est continue et $(X_n)$ converge uniformément vers $X_\infty$, alors $X_\infty$ est continue sur $[a, b]$.
De plus, d'après le théorème d'inversion intégrale sur un segment / limite pour les suites de fonctions qui convergent uniformément sur un segment,

$$X_\infty(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} [A(x)X_\infty(s) + B(s)] \, \mathrm{d}s$$

Ainsi, $X_\infty$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie l'équation différentielle.

### Unicité de la solution au problème de Cauchy

Soient $X_1$ et $X_2$ deux solutions du système différentiel. On pose $D = X_2 - X_1$. Comme $D$ est continue sur le segment $[a, b]$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\, t \in I$, $\|D(t)\| \leqslant M$. Alors,

$$\forall\, t \in I,\ D(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)D(s) \, \mathrm{d}s$$

La suite constante égale à $D$ satisfait donc les conditions satisfaites par la suite $(Y_n)$. Ainsi, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, t \in \mathbb{R},\ \|D(t)\| \leqslant \beta \frac{\alpha^n (b-a)^n}{n!}$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} D(t) = 0$ et $D(t) = 0$. Donc $D$ est la fonction identiquement nulle et $X_1 = X_2$.

## Mathématiciens

Cauchy Augustin-Louis (21 août 1789 à Paris-23 mai 1857 à Sceaux).