■ ■ ■

La méthode de la variation des constantes permet, connaissant des solutions de l'équation homogène d'une équation différentielle linéaires, d'en trouver des solutions particulières.

I. Les équations différentielles linéaires d'ordre 1

Soit a, b deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considère l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Comme a est continue, elle possède une primitive A. Ainsi, en considérant l'équation homogène, $y' - ay = 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^A y' - a\,\mathrm{e}^A y = 0$ si et seulement si $\left(\mathrm{e}^A y\right)' = 0$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$y : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)}.$$

On cherche une solution particulière y_p de l'équation $y' = ay + b$ en déterminant une fonction dérivable λ telle que $y_p : t \mapsto \lambda(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$.

$$\begin{aligned} y_p &= \lambda\,\mathrm{e}^{-A} \\ y_p' &= \lambda'\,\mathrm{e}^{-A} - a\lambda\,\mathrm{e}^{-A} \\ y_p' - ay &= \lambda'\,\mathrm{e}^{-A} \\ \lambda' &= b\,\mathrm{e}^{A} \end{aligned}$$

Ainsi, si $t_0 \in I$, on peut choisir $\lambda : t \mapsto \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{e}^{A(s)}\,\mathrm{d}s$ et une solution particulière sera donnée par

$$y_p : t \mapsto \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{e}^{A(s)}\,\mathrm{d}s$$

L'ensemble des solutions de l'équation sera donc

$$\left\{ t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-A(t)} + \mathrm{e}^{-A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)\,\mathrm{e}^{-A(s)}\,\mathrm{d}s \right\}.$$

II. Les équations différentielles linéaires d'ordre 2

Soit a, b, c trois fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considère l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$. Le réel t_0 désigne un élément de I.
Remarque. Lorsque a et b sont des fonctions constantes, les résultats sur les systèmes différentiels à coefficients constants permettent de trouver des solutions de l'équation homogène.

On **suppose connues** deux solutions y_1, y_2 de l'équation homogène qui soient **linéairement indépendantes**, i.e.

$$\left(\exists\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \forall\ t \in I,\ \lambda y_1(t) + \mu y_2(t) = 0\right) \ \Rightarrow\ \lambda = \mu = 0.$$

II.1 Mise en équation

On cherche une solution particulière y_p de l'équation $y'' + ay' + by = c$ en déterminant deux fonctions dérivables λ et μ telles que $y_p : t \mapsto \lambda(t)y_1(t) + \mu(t)y_2(t)$.
On suppose de plus que

$$\lambda'(t)y_1(t) + \mu'(t)y_2(t) = 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned} y_p &= \lambda y_1 + \mu y_2 \\ y_p' &= \lambda' y_1 + \lambda y_1' + \mu' y_2 + \mu y_2' \\ &= \lambda y_1' + \mu y_2' \\ y_p'' &= \lambda' y_1' + \lambda y_1'' + \mu' y_2' + \mu y_2'' \\ y_p'' + a y_p' + b y_p &= \lambda' y_1' + \mu' y_2' \end{aligned}$$

Ainsi, le couple (λ', μ') est solution du système $(\mathscr{C})$

$$\forall\ t \in I,\ \begin{cases} \lambda'(t)y_1(t) + \mu'(t)y_2(t) &= 0 \\ \lambda'(t)y_1'(t) + \mu'(t)y_2'(t) &= c(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\ \forall\ t \in I,\ \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Ce système possède une unique solution si et seulement si

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Remarque. W est le Wronskien de (y_1, y_2).

II.2 Intermède avec Wronski

Supposons qu'il existe un réel $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) = 0$. Alors, les colonnes de W sont liées et il existe λ_1, λ_2 tel que

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_1(t_0) \\ y_1'(t_0) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2(t_0) \\ y_2'(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi, en notant $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, alors $z \in \mathscr{S}_H$ et $z(t_0) = z'(t_0) = 0$. D'après le théorème de Cauchy linéaire, z est identiquement nulle. Alors,

$$\forall\, t \in I,\, \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0$$

Ainsi, (y_1, y_2) est liée.

On a ainsi montré que

$$\exists\, t_0 \in I\ ;\ W(t_0) \neq 0 \ \Rightarrow\ (y_1, y_2) \text{ est liée.}$$

En considérant la contraposée,

$$(y_1, y_2) \text{ est libre } \Rightarrow\ \forall\, t \in I,\, W(t) \neq 0.$$

II.3 Conclusion

D'après les deux parties précédentes, le système $(\mathscr{C})$ possède une unique solution. Ainsi, on peut calculer λ' et μ' puis λ et μ pour construire la solution particulière y_p.

III. Et en dimensions supérieures ?

On peut généraliser cette méthode aux équations différentielles linéaires d'ordre n. Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ et c des fonctions continues. On considère l'équation différentielle :

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} = c$$

On montre en utilisant le théorème de Cauchy linéaire que l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est de dimension n.
On suppose connues des solutions $(y_1, \dots, y_n)$ linéairement indépendantes de l'équation homogène.
On cherche alors une solution de l'équation homogène de la forme

$$y_p : t \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i(t)$$

et on impose

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' y_i^{(k)} = 0,\ \forall\, k \in [\![0, n-2]\!].$$

On obtient alors l'équation supplémentaire

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' y_i^{(n-1)} = c.$$

On peut écrire l'ensemble de ces équations sous la forme

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_{n-1}' \\ \lambda_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$$

On montre en utilisant le Wronskien que cette matrice est inversible et on peut en déduire les solutions en utilisant les systèmes de Cramer.

Mathématiciens

Cramer Gabriel (31 juil. 1704 à Genève-4 jan. 1752 à Bagnols-sur-Cèze).

Wronski Jozef-Maria Hoëné (23 août 1778 à Wolsztyn (Pologne)-8 août 1853 à Neuilly-sur-Seine (France)).