



On cherche dans cet exercice à calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Partie I : Avec des polynômes

Pour tout entier naturel n , on pose

$$Q_n = \frac{1}{2i} [(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}].$$

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

1. **a)** Montrer que $Q_n \in \mathbb{R}[X]$.
- b)** Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de Q_n .
2. **a)** Déterminer les racines de Q_n .
- b)** En déduire que

$$Q_n = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(X^2 - \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \right).$$

3. Une somme de sinus.

- a)** Montrer que $Q_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$.
- b)** En déduire que $\sum_{k=1}^n \cotan^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.
- c)** Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$.

4. Calcul de la limite.

- a)** Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cotan x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.
- b)** En déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

5. Approximations.

- a)** Montrer que $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{2(2n+1)}$.
- b)** Écrire, en Python, une fonction `approx(p)` qui prend comme argument un entier naturel p et renvoie une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-p} près.

Partie II : Avec la fonction cotangente

On rappelle que :

- * la fonction cotangente est le rapport $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$.
- * Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $a_n \neq 0$ et $P(x) = a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré n . Le polynôme P possède au plus n racines et si ζ_1, \dots, ζ_n sont les racines du polynôme P , alors $P(x) = a_n \prod_{k=1}^n (x - \zeta_k)$.

6. Étude de fonction.

- a)** Déterminer le domaine de définition puis la parité de la fonction cotan.
 - b)** Déterminer le domaine de dérivabilité puis la valeur de la dérivée de la fonction cotan.
 - c)** En déduire le tableau de variations de la fonction cotan sur $]-\pi, \pi[$, puis sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
7. Identifier les fonctions f à valeurs réelles deux fois dérivables solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y = 2 \cotan^3 x$ sur $]0, \pi[$ telles que $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

8. Quelques formules trigonométriques.

- Soient x, y deux réels.
- a)** Exprimer $\cotan(x+y)$ en fonction de $\cotan x$ et $\cotan y$, lorsque ces quantités sont définies.
 - b)** Exprimer $\cotan x - 2 \cotan(2x)$ en fonction de $\tan x$, lorsque ces quantités sont définies.

9. Bijection réciproque.

- a)** Justifier l'existence d'une bijection réciproque de la fonction cotangente à valeurs dans $]0, \pi[$. Préciser son domaine de définition et sa monotonie. Celle-ci sera notée Acotan .

b) Préciser le domaine de définition et la valeur de la dérivée de la fonction Acotan .

c) Pour tout $x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$, déterminer les valeurs $\cotan(\text{Acotan}(x))$ et $\text{Acotan}(\cotan(x))$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sin \text{Acotan}(x)$.

10. Calcul d'un produit. Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul et x un réel positif n'appartenant pas à l'ensemble $\{\frac{k\pi}{n}, k \in \{0, \dots, n-1\}\}$.

a) Pour tout nombre complexe $\lambda = e^{2inx}$ de module 1, déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $(z-1)^n - \lambda(1+z)^n = 0$.

b) En déduire, en fonction de la parité de n , la valeur de

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cotan\left(x + \frac{k\pi}{n}\right).$$

11. Calcul de $\zeta(2)$.

Soit m un entier naturel et x un réel.

a) Montrer que

$$\sin\{(2m+1)x\} = (\sin x)^{2m+1} \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\cotan x)^{2m-2k}.$$

b) On considère le polynôme : $P_m = \sum_{k=0}^m \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k X^{m-k}$.

Déterminer le terme de plus haut degré de P_m puis démontrer que l'ensemble des racines de P_m est $\left\{ \cotan^2 \frac{k\pi}{2m+1}, k \in \llbracket 1, m \rrbracket \right\}$.

c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^m \cotan^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

d) En définissant la fonction cosécante par $\csc = \frac{1}{\sin}$, en déduire que

$$\sum_{k=1}^m \csc^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m+2)}{3}.$$

e) Montrer que pour tout $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\cotan^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$.

f) En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2}$.

g) Déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \right)_{m \in \mathbb{N}^*}$.