■ ■ ■

Certaines questions de ce sujet font intervenir de l'algèbre euclidienne.
Toutes les parties sont indépendantes.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, l'*opérateur différence* est défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Opérateur de différence.

a) Déterminer $\Delta(\mathbb{R}_n[X])$ puis $\operatorname{Ker}\Delta$.

b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et m entier naturel, montrer que $(\Delta^m P)(X) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k}\binom{m}{k} P(X+k)$.

Partie I : Polynômes de Bernoulli

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{x}{e^x-1}$ et $f(0) = 1$.

2. Étude de la régularité de la fonction f.

a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et calculer sa dérivée.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

3. Variations de la fonction f.

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies ainsi que leur position par rapport à la courbe représentative de f.

b) Dresser le tableau des variations de f, puis tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

4. Développement limité. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer le développement limité de $\frac{e^x-1}{x}$ à l'ordre n en 0.

b) En déduire (sans le calculer) que f admet un développement limité d'ordre n en 0.
On notera $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité.

c) Déterminer le développement limité de f à l'odre 3 en 0. En déduire b_0, b_1, b_2, b_3.

5. Une relation de récurrence sur les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) En remarquant que $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

b) En déduire une formule de récurrence permettant le calcul de b_n.

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$. B_n est appelé le n-ème polynôme de Bernoulli. On utilisera des notations identiques pour polynômes et fonctions polynomiales associées.

6. Déterminer B_0, B_1, B_2 en explicitant les coefficients.

7. Soit $n \geqslant 2$. Montrer les égalités suivantes.

a) $B_n(0) = B_n(1)$.

b) $B_n'(X) = nB_{n-1}(X)$.

c) $\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

d) Calculer ΔB_1, ΔB_2 et en déduire que $(\Delta B_n)(X) = nX^{n-1}$.

8. Une nouvelle définition.

a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes définie par $B_0 = 1$, $\Delta B_n = nX^{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout n entier naturel non nul.

b) En déduire que $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$.

c) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(X) = nX^{n-1}$.

d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_{2n+1} = B_n(1) = B_n(0) = B_n(1/2) = 0$$

Partie II : Polynômes de Hilbert

On pose $H_0 = 1$ et pour tout $n > 0$, $H_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$.

9. Montrer que $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.

10. Montrer que, pour tout n entier naturel, $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

11. Pour tout n entier naturel, calculer ΔH_n.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

12. En utilisant les nombres $(Dg^m P)(0))_{m\in\mathbb{N}}$, exprimer P dans la base des $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

13. En déduire que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si les coordonnées de P dans la base des $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont entières.

Partie III : Polynômes d'Euler

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = P(X+1)+P(X)$. Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

14. Montrer que φ est bijective.

15. Montrer qu'il existe un unique polynôme, noté E_n, satisfaisant la relation $P(X+1) + P(X) = 2X^n$.

16. Déterminer une relation simple entre E_n' et E_{n-1}.

17. En déduire que

$$E_n(X+1) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} E_p(X).$$

18. À l'aide de la relation précédente, exprimer E_n en fonction des $(E_p)_{p\leqslant n-1}$.

19. Démonter que $E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$.

Partie IV : Polynômes de Tchebychev

On définit par récurrence la suite de polynômes

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Le polynôme T_n est le $n$ème polynôme de Tchebychev. Dans tout ce T.D., on identifiera polynômes et fonctions polynomiales.

20. Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.

21. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est un polynôme à coefficients entiers dont vous déterminerez la parité, le degré et le coefficient dominant.

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [-1,1]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

23. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a)** Montrer que, pour tout $t \in [0,\pi]$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.
- **b)** Montrer que $T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k}(X^2-1)^k$.

24. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, T_n possède exactement n racines distinctes.
Pour $f \in \mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$, la norme infinie de f, notée $\|f\|_\infty$ est le réel $\|f\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |f|$.

25. Justifier l'existence de la norme infinie.

26. Calculer $\|T_n\|_\infty$.

27. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- **a)** Montrer que pour tout réel u, $|\sin(nu)| \leqslant n|\sin(u)|$.
- **b)** En déduire $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

28. Montrer que pour tout réel strictement positif r, $T_n(\frac{r+r^{-1}}{2}) = \frac{r^n+r^{-n}}{2}$.

29. Soit $x \in [1,+\infty[$.

- **a)** Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}^\star$, tel que $x = \frac{r+r^{-1}}{2}$.
- **b)** En déduire que $1 \leqslant T_n(x) \leqslant (x+\sqrt{x^2-1})^n$.

30. En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos nt$ valable pour tout réel $t \in [0,\pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

31. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$. Déduire de la question précédente que $T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}$.

32. Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)$.

Partie V : Polynômes de Legendre

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel, $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ème du polynôme P. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes définis par

$$U_n = (X^2-1)^n \text{ et } L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$

La famille (L_n) est la famille des polynômes de Legendre. Pour tout polynôme P, on note $\mathscr{L}(P)$ le polynôme

$$\mathscr{L}(P) = \left[(X^2-1)P'\right]'.$$

33. a) Calculer L_0, L_1, L_2 et L_3.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.

c) En déduire que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

34. Montrer que L_{2n} (resp. L_{2n+1}) est une fonction paire (resp. impaire).

35. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X-1)^k (X+1)^{n-k}$.

b) En déduire les valeurs de $L_n(-1)$ et de $L_n(1)$.

36. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1}' - 2(n+1)X \cdot U_n = 0 \quad (1)$$
$$(X^2-1)U_n' - 2nX \cdot U_n = 0 \quad (2)$$

b) En dérivant les équations précédentes, montrer que la suite (L_n) vérifie

$$L_{n+1}' = X \cdot L_n' + (n+1)L_n \quad (3)$$
$$\mathscr{L}(L_n) = n(n+1)L_n \quad (4)$$

c) En déduire que la restriction de $\mathscr{L}$ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme que nous noterons $\mathscr{L}_n$. Exprimer la matrice de $\mathscr{L}_n$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

Pour tout P, $Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$.

37. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

38. Montrer que pour tous P, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle \mathscr{L}(P), Q \rangle = \langle P, \mathscr{L}(Q) \rangle$. On dit que $\mathscr{L}$ est un endomorphisme autoadjoint.

39. a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n)_{n \in [\![0,m]\!]}$ est une famille de polynômes orthogonaux.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^\perp$.

40. Montrer que $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

41. En considérant un polynôme $Q = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que L_{n+1} possède $n+1$ racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$.
Cette propriété est vérifiée par toutes les familles de polynômes orthogonaux.

42. Calculer la distance de X^{n+1} au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Mathématiciens

Bernoulli Jacob (6 jan. 1655 à Basel-16 août 1705 à Basel).
Euler Leonhard (15 avr. 1707 à Basel-18 sept. 1783 à St Pétersbourg).
Legendre Adrien-Marie (18 sept. 1752 à Paris-9 jan. 1833 à Paris).
Tchebychev Pafnouti Lvovitch (16 mai 1821 à Borovsk-8 déc. 1894 à St Pétersbourg).
Hilbert David (23 jan. 1862 à Wehlau-14 fév. 1943 à Göttingen).