# Autour des endomorphismes nilpotents



■ ■ ■

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoiel de dimension finie $n$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots f}_{k\text{fois}}$. L'endomorphisme $f$ est nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Dans toute la suite, sauf mention contraire, $f$ et $g$ désignent des endomorphismes nilpotents. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $r_k = \operatorname{Rg} f^k$ et $d_k = \dim(\operatorname{Ker} f^k)$.

## Partie I : Généralités

**1.** On suppose que $f$ est non nul. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul $p$ tel que $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
L'entier $p$ est l'indice de nilpotence de $f$. Par convention, l'indice de nilpotence de l'endomorphisme nul vaut 0.

**2.** On note $D$ l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que $D$ est un endomorphisme nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

**3.** Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$.
Dans toute la suite, on note $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$.

**4.** Montrer que $\mathscr{B}$ est une famille libre et en déduire que $p \leqslant n$.

**5.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $u^k(x) = 0_E$.

**a)** Montrer que $u$ est un endomorphisme nilpotent.

**b)** Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus $E$ de dimension finie.

**6.** Montrer que, pour tout entier naturel $k$, $r_k - r_{k+1} = \dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f^k)$.

**7.** On suppose que $f$ et $g$ commutent. Montrer que $f \circ g$ et $f + g$ sont des endomorphismes nilpotents.

**8.** Le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $f$ s'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. Montrer que $\lambda$ est une valeur propre de $f$ si et seulement si $\lambda = 0$.

## Partie II : Cas où l'indice de nilpotence est maximal

On suppose dans cette partie que $f$ est nilpotent d'indice de nilpotence égal à $n$.

**9.** Montrer que la famille $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de $E$ et décrire $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

**10.** Déterminer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, les valeurs de $d_k$ et $r_k$ et en déduire que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Ker} f^{n-k}$.

**11.** Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension $r$ de $E$ stable par $f$. On note $g$ l'endomorphisme induit par $f$ sur $F$.

**a)** Montrer que $g^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et en déduire que $g^r = 0$.

**b)** Montrer que $F \subset \operatorname{Ker} f^r$.

**c)** En déduire que $F = \operatorname{Ker} f^r$.

**d)** Décrire l'ensemble des sous-espaces vectoriels stables par $f$.

**12.** On note $\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E) \ ; \ f \circ g = g \circ f\}$. Soit $g \in \mathscr{C}(f)$.

**a)** On note $a_0, \ldots, a_{n-1}$ les coordonnées de $g(x_0)$ dans la base $\mathscr{B}$. Exprimer, pour tout entier $k \in [\![0, n-1]\!]$, les vecteurs $g(f^k(x_0))$ dans la base $\mathscr{B}$.

**b)** En déduire que $g$ est un polynôme en $f$.

**c)** Déterminer $\mathscr{C}(f)$ ainsi que sa dimension.

## Partie III : Réduction de JORDAN des endomorphismes nilpotents

**13.** Montrer qu'il existe une base $\widetilde{\mathscr{B}}$ de $E$ telle que la matrice de $f$ dans la base $\widetilde{\mathscr{B}}$ soit de la forme $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$, où, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, la matrice $J_i$ est une matrice carrée de la forme $J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

Les matrices $J_i$ sont appelés blocs de Jordan.

*Indication : On pourra raisonner par récurrence sur l'indice de nilpotence.*

**14.** Relier la dimension du noyau de $f$ à l'entier $r$.

## Mathématiciens

**Jordan** Camille (5 jan. 1838 à Lyon-22 jan. 1922 à Paris).