■ ■ ■

Dans tout le problème, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Pour tout entier naturel p non nul, on note $(x_i)_{i\in[\![0,p]\!]}$ la subdivision régulière de $[a,b]$ de pas $\frac{b-a}{p}$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0,p]\!]$,

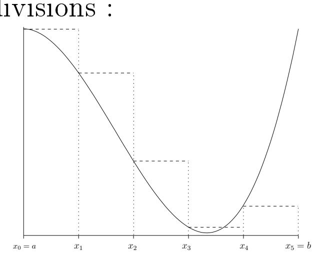
$$x_i = a + i\frac{b-a}{p}.$$

Une méthode d'intégration est d'*ordre* au moins n si elle est exacte sur les polynômes de degrés inférieurs ou égaux n et non exacte pour au moins un polynôme de degré $n+1$.

Partie I : Méthode des rectangles à gauche

La méthode composée des rectangles à gauche consiste à découper le segment $[a,b]$ en p sous-segments puis à appliquer la méthode simple des rectangles à gauche sur chacune de ces subdivisions :

$$I_p^g(f) = \frac{b-a}{p}\sum_{i=0}^{p-1} f(x_i).$$



Dans toute cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. On note F une primitive de f et $M_1 = \sup\limits_{[a,b]} |f'|$.

1. Montrer que, pour tout $i \in [\![0,p-1]\!]$,

$$\left|F(x_{i+1}) - F(x_i) - (x_{i+1}-x_i)F'(x_i)\right| \leqslant \frac{M_1}{2}(x_{i+1}-x_i)^2.$$

2. En déduire que

$$\left|\int_{[a,b]} f - I_p^g(f)\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2p}.$$

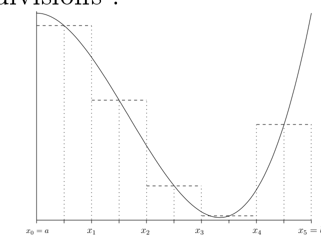
3. Montrer que cette borne est atteinte pour $f : x \mapsto x - a$.

4. Montrer que la méthode des rectangles à gauche est d'ordre 0.

Partie II : Méthode des rectangles médians

La méthode composée des rectangles médians consiste à découper le segment $[a,b]$ en p sous-segments puis à appliquer la méthode simple des rectangles médians sur chacune de ces subdivisions :

$$I_p^m(f) = \frac{b-a}{p}\sum_{i=0}^{p-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right).$$



Dans toute cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur le segment $[a,b]$. On note F une primitive de f et $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$. Pour tout entier $i \in [\![0,p-1]\!]$, on pose $\gamma_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$

5. Soit $i \in [\![0,p-1]\!]$.

a) Montrer que

$$(x_{i+1}-x_i)f(\gamma_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \big(f(\gamma_i) + (t-\gamma_i)f'(\gamma_i)\big)\ \mathrm{d}t.$$

b) En déduire que

$$\left|F(x_{i+1}) - F(x_i) - (x_{i+1}-x_i)F'(\gamma_i)\right| \leqslant \frac{M_2}{24}(x_{i+1}-x_i)^3.$$

6. Montrer que

$$\left|\int_{[a,b]} f - I_p^m(f)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{24p^2}$$

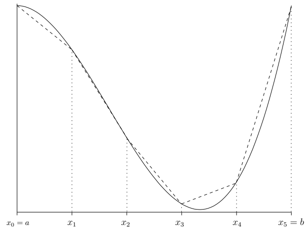
7. Montrer que cette borne est atteinte pour $f : x \mapsto (x-a)^2$.

8. Montrer que la méthode des rectangles médians est d'ordre 1.

Partie III : Méthode des trapèzes

La méthode composée des trapèzes consiste à découper le segment $[a,b]$ en p sous-segments puis à appliquer la méthode simple des trapèzes sur chacune de ces subdivisions :

$$I_p^t(f) = \frac{b-a}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}.$$



On suppose dans cette partie que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et on note $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$. Pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, on note φ_i l'approximation affine sur $[x_i, x_{i+1}]$ de f et $g_i = f - \varphi_i$.

9. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f''(t)(t-x_i)(x_{i+1}-t)\,\mathrm{d}t = -2\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i(t)\,\mathrm{d}t.$$

10. En déduire que

$$\left|\int_{[a,b]} f - I_p^t(f)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12p^2}.$$

11. Montrer que cette borne est atteinte pour $f : x \mapsto (x-a)^2$.

12. Montrer que la méthode des trapèzes est d'ordre 1.

13. Montrer que, lorsque $f'' \geqslant 0$ (en particulier lorsque f est convexe), pour tout entier naturel p, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant I_p^t(f)$.

Partie IV : Méthode de Simpson

La méthode composée de Simpson consiste à découper le segment $[a,b]$ en p sous-segments puis à approcher, sur chacune de ces subdivisions, la fonction f par un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 :

$$I_p^s(f) = \frac{b-a}{6p}\sum_{i=0}^{p-1}\left[f(x_i) + 4f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right].$$

14. Soit $g \in \mathscr{C}^5([a,b],\mathbb{R})$ une fonction impaire. On note $K_5 = \sup\limits_{[a,b]} \left|g^{(5)}\right|$.

En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral pour g et g', montrer que

$$\left|g(x) - \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0))\right| \leqslant \frac{K_5}{180}|x|^5.$$

On suppose dans cette partie que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^4$ sur le segment $[a,b]$. On pose $M_4 = \sup\limits_{[a,b]} \left|f^{(4)}\right|$.

15. Montrer que, pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\left|F(x_{i+1}) - F(x_i) - \frac{1}{6p}\left[f(x_{i+1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right]\right| \leqslant \frac{M_4(x_{i+1}-x_i}{2880}$$

Poser $g : t \mapsto F\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} + t\right) - F\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2} - t\right)$.

16. En déduire que

$$\left|I_p^s(f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880p^4}.$$

On peut montrer que la méthode de Simpson est d'ordre 3. On peut augmenter le nombre des nœuds où est évaluée la fonction à intégrer (2 nœuds pour la méthode des trapèzes, 3 pour la méthode de Simpson,...). Ces méthodes sont appelées *méthodes de* Newton-Cotes. Cependant, lorsque le nombre de nœuds dépasse 8, des coefficients négatifs apparaissent ce qui engendre des erreurs d'arrondis.

Mathématiciens

Newton Isaac (4 jan. 1643 à Woolsthorpe-31 mar. 1727 à Londres).
Cotes Roger (10 juil. 1682 à Burbage-5 juin 1716 à Cambridge).
Taylor Brook (18 août 1685 à Edmonton-29 déc. 1731 à Londres).
Simpson Thomas (20 août 1710 à Market Bosworth-14 mai 1761 à Market Bosworth).