■ ■ ■

Dans ce problème, on utilise la convexité pour déterminer le maximum d'une fonctionnelle appelée *entropie* et notée H sur divers ensembles de probabilités ou de fonctions. Les parties sont largement indépendantes et la lettre H désigne une fonction différente dans chacune de ces parties. On adopte la convention $0 \ln 0 = 0$ et on note $\overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Une fonction est dite convexe si elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et sa dérivée seconde est positive.

Partie I : Entropie sur un ensemble fini

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul. Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[\![1, n]\!]$, l'entropie de X est le réel

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) \ln(\mathbb{P}(X = k)).$$

1. Propriétés de H.

a) Montrer que H est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

b) Décrire les lois de probabilités des variables aléatoires X telles que $H(X) = 0$.

c) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Calculer $H(U)$.

2. Maximisation. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

a) Montrer que

$$H(U) - H(X) = -\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) \ln \frac{\mathbb{P}(U = k)}{\mathbb{P}(X = k)}.$$

b) En déduire que

$$H(X) \leqslant H(U).$$

Partie II : Entropie sur un ensemble dénombrable

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, l'entropie H de X est le réel défini par

$$H(X) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \ln(\mathbb{P}(X = k)).$$

3. Propriétés de H.

a) Montrer que H est bien définie, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$.

b) Décrire les lois des variables aléatoires X telles que $H(X) = 0$.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si cette limite existe,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \ln\left(\frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(Y = k)}\right) \geqslant 0.$$

Dans la suite de cette partie, p désigne un réel tel que $p \in [0, 1[$. Soit G une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

5. Déterminer la valeur de $H(G)$.

6. Maximisation sous contrainte. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{E}[Y] \leqslant \frac{p}{1-p}$. Montrer que

$$H(Y) \leqslant H(G).$$

Partie III : Entropie sur un segment

Dans cette partie, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Toutes les fonctions sont à valeurs réelles. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Pour tout $f \in \mathscr{D}$, on définit

$$H(f) = -\int_a^b f(x) \ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. Déterminer la constante λ telle que $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lambda$ soit dans $\mathscr{D}$, puis calculer $H(u)$.

8. Inégalité de Jensen. Soient φ une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, r une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathscr{D}$.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x) - \varphi(y) \geqslant \varphi'(y)(x - y).$$

b) Montrer que pour tout réel y,

$$\int_a^b \varphi(r(x))f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \varphi(y) + \varphi'(y) \cdot \left(\int_a^b r(x)f(x)\,\mathrm{d}x - y\right).$$

c) En déduire que

$$\varphi\left(\int_a^b r(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_a^b \varphi(r(x))f(x)\,\mathrm{d}x.$$

9. Maximisation. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{D}$,

$$H(f) \leqslant H(u).$$

Partie IV : Entropie sur $\mathbb{R}_+$

Dans cette partie, $\mathscr{D}_+$ désigne l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ intégrables telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f = 1$. Pour tout $f \in \mathscr{D}_+$, on note

$$H(f) = -\int_0^{+\infty} f(t)\ln f(t)\,\mathrm{d}t$$

si cette intégrale converge et $H(f) = +\infty$ sinon.

10. Un exemple de fonction intégrable.

a) Montrer qu'il existe un réel x_0 strictement positif tel que

$$\forall\, x \geqslant x_0,\ x^2 e^{-x^2} \leqslant 1.$$

b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Dans la suite de cette question, on note

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

c) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2}$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{n}\int_0^1 (1 - x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant I \leqslant \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

f) En admettant la formule de Wallis, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, déterminer la valeur de I.

Dans toute la suite, on note $f_{\mathscr{N}} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$.

11. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f_{\mathscr{N}}(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f_{\mathscr{N}}(x)\,\mathrm{d}x$ puis $H(f_{\mathscr{N}})$.

12. Maximisation sous contrainte. Montrer que pour tout $f \in \mathscr{D}_+$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$,

$$H(f) \leqslant H(f_{\mathscr{N}}).$$