■ ■ ■

On note :
- $\mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n.
- $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.
- $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n.
- $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives, i.e. les matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont strictement positives.

Partie I : Décomposition LU

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, la matrice obtenue à partir de A en ne gardant que les j premières lignes et les j premières colonnes. La famille $(\det A_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est la famille des déterminants principaux de A.

Théorème 1 (Décomposition LU (ou LR)).
Toute matrice $A \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = LU$ où L est une matrice triangulaire inférieure (*Lower*) ayant uniquement des 1 sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure (*Upper*) si et seulement si tous les déterminants principaux de A sont non nuls. Si elle existe, une telle décomposition est unique.

1. Soit $A \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$ qui possède deux décomposition LU notée $A = L_1U_1 = L_2U_2$.

a) Montrer que $L_2^{-1}L_1$ est bien définie et est diagonale.

b) En déduire que $L_1 = L_2$ puis que $U_1 = U_2$.

2. Pour montrer que toute matrice à déterminants principaux non nuls admet une décomposition LU, on raisonne ensuite par récurrence. On considère $n \geqslant 2$ et on suppose la propriété vraie pour toutes les matrices de taille $n-1$.
Soit $A \in \mathscr{G}\ell_n(\mathbb{R})$. On note $A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & a_{n,n}\end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, $B_1 \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, $C_1 \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $a_{n,n} \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe L_1 triangulaire inférieure à diagonale unité, U_1 triangulaire supérieure inversible telles que $A_1 = L_1U_1$.

b) On suppose que $A = LU$ où $L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ D_1 & 1\end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} U_1 & E_1 \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$. Déterminer des équations satisfaites par D_1, E_1 et α.

c) Montrer que le système d'équations précédents possède une unique solution.

d) En déduire l'existence de la décomposition LU.

3. On suppose que $A = LU$ admet une décomposition LU.

a) Montrer que A est inversible.

b) En utilisant les notations de la récurrence précédente, montrer que $A_1 = L_1R_1$ est également inversible.

c) En déduire que les déterminants principaux de A sont non nuls.

Remarque. Si A est inversible mais possède des déterminants principaux nuls, la méthode précédente ne fonctionne plus. On peut montrer, en utilisant la méthode du pivot de Gauss qu'il existe une matrice de permutation P, une matrice triangulaire inférieure L à coefficients diagonaux égaux à 1 et une matrice triangulaire inférieure U telle que $A = PLU$.

Partie II : Factorisation de Cholesky

Théorème 2 (Factorisation de Cholesky).
Une matrice réelle A est symétrique définie positive si et seulement s'il existe une matrice inversible B triangulaire inférieure telle que $A = B^tB$. De plus, une telle décomposition est unique si on impose la positivité des coefficients diagonaux de B.

4. Montrer que s'il existe une matrice inversible B triangulaire inférieure telle que $A = {}^tBB$, alors A est symétrique définie positive.

5. Soit A une matrice symétrique définie positive.

a) Montrer que $\varphi : (X,Y) \mapsto {}^tXAY$ définit un produit scalaire.
Soit $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ une base orthonormée pour le produit scalaire φ et P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$.

b) Montrer que ${}^tPAP = I_n$ puis conclure.

Partie III : Décomposition QR

Théorème 3 (Décomposition QR).

Toute matrice $A \in \mathscr{Gl}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QR$, où Q est une matrice orthogonale et R est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.

Corollaire 4 (Décomposition d'Iwasawa).

Toute matrice $A \in \mathscr{Gl}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = QDR$ où Q est une matrice orthogonale, D est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs et R est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux égaux à 1.

[TPE] **'17**

6. Version Gram-Schmidt. Soit $A = [A_1, \ldots, A_n]$ une matrice inversible.

a) Montrer que la famille $(A_1, \ldots, A_n)$ est libre.

b) En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, montrer que A admet une décomposition QR.

c) Application : Inégalité d'Hadamard. Montrer que pour tout $A = [A_1 \cdots A_n] \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|A_i\|$. On pourra distinguer les cas en fonction de la liberté de la famille $(A_1, \ldots, A_n)$.

On propose une nouvelle démonstration de ce résultat via les matrices de Householder.

[É.N.S.] **'19**Soit $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H(V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H(V) = I_n - \frac{2}{\|V\|^2} V {}^tV$.

7. Version Householder. On note $H_R = \{I_n\} \cup \{H(V),\, V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Pour $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, montrer que $H(V) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $\|X\| = \|Y\|$. Montrer qu'il existe $H \in H_R$ telle que $HX = Y$.

c) Soit $A \in \mathscr{Gl}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus $n-1$ matrices de H_R et R une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs telles que $PA = R$. Décrire le principe de construction de P et de R.

d) Écrire une fonction basée sur les matrices de Householder qui donne la factorisation QR d'une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La complexité attendue doit être équivalente à $\frac{4n^3}{3}$.

8. Soient $A \in \mathscr{Gl}_n(\mathbb{R})$ et $A = Q_1R_1 = Q_2R_2$ deux décompositions QR. On pose $\Delta = R_1R_2^{-1}$.

a) Montrer que Δ est triangulaire supérieure et orthogonale.

b) En déduire que Δ est diagonale puis que ses coefficients sont dans $\{-1, 1\}$.

c) Conclure quant à l'unicité de la décomposition.

9. Démontrer l'existence de la décomposition d'Iwasawa.

Partie IV : Décomposition polaire

Théorème 5 (Décomposition polaire).

Toute matrice $A \in \mathscr{Gl}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthgonale et S est une matrice symétrique définie positive.

Corollaire 6.

Toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire sous la forme $A = \Omega S$ où Ω est une matrice orthgonale et S est une matrice symétrique positive (i.e. dont toutes les valeurs propres sont positives.

[Mines] **'19**

10. Soit $M \in \mathscr{Gl}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe (Ω_1, S_1) et (Ω_2, S_2) dans $\mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M = \Omega_1 S_1 = \Omega_2 S_2$.

a) Montrer que $S_1^2 = S_2^2$.

b) Montrer qu'il existe $(P, Q) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $D = {}^tPS_1P$ et $\Delta = {}^tQS_2Q$ soient diagonales.

c) En notant $R = Q{}^tP$, montrer, en utilisant les questions précédentes, que $RD = \Delta R$.

d) En déduire que $S_1 = S_2$ puis que $\Omega_1 = \Omega_2$.

11. Soit $M \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe $O \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et Δ diagonale réelle telles que ${}^tMM = O\Delta^2 O$.

b) En posant $S = {}^tO\Delta O$, montrer que S est symétrique puis que MS^{-1} est orthogonale.

c) En déduire le théorème de la décomposition polaire.

On admettra que, si K est une partie fermée, bornée et non vide d'un espace vectoriel de dimension finie et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, alors il existe une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge.

12. Montrer que $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée, bornée et non vide de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

13. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles qui converge vers M.

b) En déduire qu'il existe une suite de matrices symétriques $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une suite de matrices orthgonales $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{k\in\mathbb{N}} O_k S_k = M$.

c) Montrer qu'il existe Ω matrice orthogonale et S symétrique réelle telles que $M = \Omega S$.

d) La matrice S est-elle à valeurs propres strictement positives ?

e) Soit $\widetilde{\Omega}$ une matrice orthogonale dont la restriction à $\operatorname{Ker} S^{\perp}$ est l'identité. Montrer que $M = \widetilde{\Omega}\Omega S$ et en déduire que la décomposition n'est plus unique.

Mathématiciens

Gauss Johann Carl Friedrich (30 avr. 1777 à Brunswick-23 fév. 1855 à Göttingen).

Gram Jorgen Pedersen (27 juin 1850-29 avr. 1916 à Copenhague).

Hadamard Jacques Salomon (8 déc. 1865 à Versailles-17 oct. 1963 à Paris).

Cholesky André-Louis (15 oct. 1875 à Montguyon-31 août 1918 à Bagneux (Aisne)).

Schmidt Erhart (13 jan. 1876 à Dorpat-16 déc. 1959 à Berlin).

Householder Alston Scott (5 mai 1904 à Rockford-4 juil. 1993 à Malibu).

Iwasawa Kenkichi (11 sept. 1917 à Shinshuku-26 oct. 1998 à Tokyo).