Étude de $O(E)\backslash SO(E)$
Quarts de tour en dimension 4

■ ■ ■

Partie I : Étude de $O(E)\backslash SO(E)$

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, $f \in O(E)\backslash SO(E)$ et M sa matrice dans une base orthonormée $\mathscr{B}$.

1. Soit u un vecteur non nul de E. Montrer que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$, alors $\lambda \in \{-1, 1\}$.

2. Soit $P(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$.

a) Déterminer $P(0)$.

b) Montrer que si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine de P, alors $P(\lambda) \in \{-1, 1\}$.

c) Montrer que -1 est racine de P.

d) En déduire qu'il existe $u \in E$ non nul tel que $f(u) = -u$.

3. Soit $u \in E$ un vecteur non nul tel que $f(u) = -u$. On pose $F = \mathrm{Vect}\{u\}$ et s la réflexion par rapport à $F^\perp$. Montrer que $g = s \circ f$ est soit l'identité, soit une rotation d'axe F.

4. On oriente $F^\perp$ par u. Dans le cas où g n'est pas l'identité, on appelle θ l'angle de la rotation. Montrer que $\mathrm{Tr}(M) = 2\cos\theta - 1$ et que le signe de $\sin\theta$ est donné par celui de $\det(u, x, f(x))$, où $x \in F^\perp$ est un vecteur normé.

5. Appliquer ces résultats à l'étude de f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie II : Quarts de tour en dimension 4

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4. On note U l'ensemble des vecteurs normés de E. Un endomorphisme orthogonal q de E est appelé quart de tour si $q^2 = -\mathrm{Id}$. On note Q l'ensemble des quarts de tour de E. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Démontrer qu'un quart de tour transforme tout vecteur x de E en un vecteur orthogonal à x.

7. a) Soit q un endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée est égale à M. Montrer que q est un quart de tour.

b) On note $\mathscr{B}(q)$ l'ensemble des bases orthonormées de E dans lesquelles la matrice de q est égale à M. Montrer que quel que soit $u \in U$, il existe $(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathscr{B}(q)$ telle que $b_1 = u$.

8. Soit $q \in Q$ et $u \in U$. On note P le plan engendré par u et $q(u)$.

a) Montrer que $(u, q(u))$ est une base orthonormée de P.

b) Montrer que le plan P est invariant par q. Décrire géométriquement la restriction de q au plan P.

c) Si v est un vecteur normé de P, il existe un nombre réel θ tel que $v = \cos(\theta)u + \sin(\theta)q(u)$. Déterminer les matrices de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ et de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$.

9. Soit $q \in Q$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = \cos(\alpha)\,\mathrm{Id} + \sin(\alpha) q$.

a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

b) Montrer que tout vecteur normé u est contenu dans un plan P invariant par f. Décrire géométriquement la restriction de f à P.

c) Déterminer le déterminant de f.