■ ■ ■

Exercice 1. (Sommes doubles) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. La notation $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker. Calculer les sommes suivantes. On donnera le résultat sous forme factorisée.

1. $S_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)$.
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} i \cdot j$.
3. $S_3 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i \cdot j \cdot \delta_{i,j}$.
4. $S_4 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} i \cdot j$.
5. $S_5 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$.
6. $S_6 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \min\{i,j\}$.
7. $S_7 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \min\{i,j\}$.

Exercice 2. (Série harmonique) La série harmonique, notée $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. a) Exprimer la quantité $\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} \frac{1}{k-j}$ en fonction de H_n.
b) Déterminer une forme simple de l'expression $\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$.
2. a) Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.
b) Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n.$$

c) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} H_k^2 = (n+1)H_n^2 - (2n+1)H_n + 2n$ puis un équivalent des sommes partielles de la série de terme général H_n^2.

Exercice 3. (Coefficients binomiaux)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{n+k} = n\binom{2n-1}{n}$.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \max\{k,\ell\} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell} \text{ et } \alpha_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{n} \min\{k,\ell\} \binom{n}{k}\binom{n}{\ell}.$$

Indication : On pourra calculer $\alpha_n + \beta_n$ et $\alpha_n - \beta_n$.