■ ■ ■

Exercice 1. (Valeur absolue & Carrés) Donner un encadrement, pour $t \in [-4,1]$, des expressions suivantes :

1. $(t-1)^2$.

2. $2t^2 - t + 9$.

3. $\dfrac{2}{t^2+5}$.

4. $\left|t - \dfrac{1}{2}\right|$.

Exercice 2. (Vrai ou faux ?) Lorsque l'affirmation est vraie, la prouver ; lorsqu'elle est fausse, donner un contrexemple et ajouter des conditions pour qu'elle devienne vraie.

1. $a \leqslant b \Rightarrow a^2 \leqslant b^2$

2. $\begin{cases} a \leqslant b \\ a' \leqslant b' \end{cases} \Rightarrow aa' \leqslant bb'$

3. $\begin{cases} 0 \leqslant a \leqslant b \\ 0 < a' \leqslant b' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{a}{a'} \leqslant \dfrac{b}{b'}$

4. $a \leqslant b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$

5. Soit $a \geqslant 0$.
$x^2 \geqslant a^2 \Leftrightarrow x \geqslant a$

6. $a \leqslant b \Rightarrow a^3 \leqslant b^3$

7. $|a| \leqslant |b| \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$

Exercice 3. (Inéquations) Soit $(a,\alpha) \in \mathbb{R}\times]-1,1[$. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0 \\ x^2 + 3x - 4 \leqslant 0 \end{cases}$;

2. $|x^2 + 2x - 3| < 6$.

3. $|x^2 + x + 1| > |x-4|$.

4. $\left|\frac{2x+1}{x-1}\right| < 1$.

5. $-1 < \frac{x+a}{1+ax} < 1$.

6. $\frac{ax}{ax+3} \leqslant 4x$.

Exercice 4. (Accroissements) Montrer que...

1. a) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \sum k = 1^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2(\sqrt{n+1} - 1)$.

2. $\forall\, (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \left|e^{ia} - e^{ib}\right| \leqslant |a-b|$.

Exercice 5. (Une inégalité classique) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$. Montrer que

$$|xy| \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

En déduire

1. $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$.

2. $\left|\frac{2x\cos(x)}{x^2+1}\right| \leqslant 1$.

Exercice 6. (Intégration) Montrer que...

1. a) $\forall\, x \in [0,1],\ 0 \leqslant x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$.

b) $\left(\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2. a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [0,1],\ (1-x^2)^n \geqslant 1 - nx^2$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{3\sqrt{n}}$.

Exercice 7. (Sommes) Montrer que...

1. $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$.

2. $\forall\, n \geqslant 2,\ \left|n^n \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^k} - 1\right| \leqslant \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}$.

Exercice 8. (Trigonométrie circulaire) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que...

1. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{\sin(n)+(-1)^n\cos(n)}{2n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n}$.

2. $\forall\, n \in \mathbb{N}\ |\sin(n\theta)| \leqslant n\,|\sin(\theta)|$.

3. $|a\cos(\theta) + b\sin(\theta)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

Exercice 9. (Pas dans $\mathbb{C}$!) Montrer qu'il n'existe pas de relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{C}$ compatible avec les opérations usuelles, i.e. telle que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$,

$$x \preccurlyeq y \ \Rightarrow\ x+z \preccurlyeq y+z,$$
$$0 \preccurlyeq x,\, 0 \preccurlyeq y \ \Rightarrow\ 0 \preccurlyeq xy.$$