Utilisation des formules de Taylor

■ ■ ■

Exercice 1. (✍)

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

2. Montrer que, pour tout $x \in]-1,0[$,

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)^{n+1}}.$$

Exercice 2. (✍) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ 1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leqslant 1 - \frac{x}{3} + \frac{2}{9}x^2.$$

Exercice 3. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur un intervalle I et a un point de I qui ne soit pas une extrémité. Déterminer la limite, lorsque h tend vers 0, de

$$\frac{1}{h^3}\left[f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)\right].$$

Exercice 4. Déterminer $\lim\limits_{a\to 0} \frac{1}{a}\displaystyle\int_0^{\pi} \tan(a\sin(x))\,\mathrm{d}x$.
Indication : On pourra écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3 en 0 pour la fonction tangente.

Exercice 5. (✈) Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \sin^2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.