Espaces vectoriels & Géométrie

■ ■ ■

I. Vecteurs directeurs, Équations

Exercice 1. (Points vers Équation)

1. Déterminer, dans $\mathbb{R}^3$, une équation cartésienne du plan dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (-1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{v} = (1, -1, 0)$.

2. Déterminer, dans $\mathbb{R}^3$, une équation cartésienne du plan passant par les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$.

Exercice 2. (Équation vers Vecteurs directeurs) Déterminer une base de vecteurs directeurs des espaces vectoriels définis par les équations suivantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $x + y + 3z = 0$.

2. Dans $\mathbb{R}^4$, $x + 2y + 3z + t = 0$.

3. Dans $\mathbb{R}^4$, $x + y + 3z = 0$.

4. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + y + z = 0, x + 2y - z = 0\right\}$.

5. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + y + z = 0, x + y + t = 0, 2x + 2y + z + t = 0\right\}$.

6. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ ; \ x + y + z + t0, x - y - 2z - t = 0\right\}$.

Exercice 3. (Perpendiculaire commune) On considère l'espace affine E de dimension 3. Soient A, A' deux points de E et $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires. On note D (resp. D') la droite passant par A (resp. A') de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{v}$). On suppose dans cet exercice que D et D' ne sont pas coplanaires.
On note I (resp. I') un point de D (resp. D') et $\overrightarrow{AI} = \alpha u$, $\overrightarrow{A'I'} = \beta \overrightarrow{v}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{II'} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ si et seulement si $\alpha \left\| \overrightarrow{u} \right\|^2 + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AA'} + \beta \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

2. De manière analogue, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{II'} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

3. Montrer que le système d'équations

$$\begin{cases} \alpha \left\| \overrightarrow{u} \right\|^2 + \beta \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AA'} & = 0 \\ \alpha \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \beta \left\| \overrightarrow{v} \right\|^2 + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{AA'} & = 0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

4. En déduire qu'il existe une unique droite sécante à D et D' et perpendiculaire à D et D'.

II. Changements de bases

Exercice 4. (Calculs de coordonnées) On note $\mathscr{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}$ la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, où $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 2, -4)$ et $\overrightarrow{w} = (3, -1, 1)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer les coordonnées du vecteur $z = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 5. (Calcul de puissance) Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $v_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $v_2 = -e_2 + e_3$ et $v_3 = e_3$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\varphi)$.

3. Pour tout entier naturel n, déterminer C^n et en déduire A^n.

Exercice 6. (Projection)

1. Soient $D_1 = \mathrm{Vect}\{(2, 1)\}$, $D_2 = \mathrm{Vect}\{(2, 2)\}$ et p la projection sur D_1 parallèlement à D_2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique.