



I. Dénombrer...

Exercice 1. (Boules) Une urne contient n boules noires ou blanches numérotées dont n_1 sont blanches et n_2 sont noires. On tire p boules dans cette urne. Déterminer le nombre de tirages donnant exactement p_1 boules blanches et p_2 boules noires lorsque...

1. ... les boules sont tirées simultanément.
2. ... les boules sont tirées successivement et sans remise.
3. ... les boules sont tirées successivement et avec remise.

Exercice 2. (Dés) Trois dés à 6 faces, discernables les uns des autres sont lancés. Déterminer le nombre de tirages...

1. total.
2. contenant au moins un 6.
3. contenant au moins deux faces identiques.
4. dont la somme des trois dés est paire.

Exercice 3. (Assiettes) On dispose d'un service de 12 assiettes qui ne diffèrent que par leur couleur : 5 sont bleues, 4 sont vertes et 3 sont rouges.

1. Combien peut-on former de piles d'assiettes différentes ?
2. Combien peut-on former de piles d'assiettes dans lesquelles toutes les assiettes rouges sont sur le dessus ?

Exercice 4. (Écritures décimales)

1. Dénombrer les nombres de 5 chiffres qui, écrits en base 10, ne contiennent qu'un seul 0.
2. Dénombrer les nombres de 5 chiffres qui, écrits en base 10, ne contiennent qu'une et une seule répétition.

3. Dénombrer les entiers strictement inférieurs à 1000 qui ne sont divisibles ni par 5 ni par 7.

Exercice 5. (Anagrammes) Déterminer le nombre d'anagrammes du mot :

1. COMPUTER.
2. DENOMBRER.
3. ABRACADABRA.

Exercice 6. (Écritures décimales) Déterminer le coefficient de x^{17} dans le développement $(1 + x^5 + x^7)^{20}$.

Exercice 7. (Carrés) On considère une grille carrée contenant n^2 cases. Combien cette grille contient-elle de carrés ?

II. Parties d'un ensemble

Exercice 8. (Partitions) Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer le nombre de partitions d'un ensemble à pq éléments en p classes ayant chacune q éléments ?

Exercice 9. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini à n éléments. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y$ soit un singleton.

III. Applications

Exercice 10. Soient k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$. Combien y-a-t il de k -uplets (i_1, \dots, i_k) appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket^k$ lorsque...

1. ... les répétitions sont autorisées.
2. ... les répétitions ne sont pas autorisées.
3. ... on impose $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.

Exercice 11. (Surjections) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les surjections de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 12. (Projections) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dénombrer les applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $p \circ p = p$.

Exercice 13. (Relations binaires) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n . Quel est le nombre dans E de

1. ... relations binaires ?
2. ... relations binaires symétriques ?
3. ... relations binaires réflexives et symétriques ?
4. ... relations binaires réflexives et antisymétriques ?